THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE

DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Jean SIMEON

FAMILLES NORMALES DE GERMES DIRICHLETIENS

GERMES DIRICHLETIENS A EXPOSANTS COMPLEXES

Soutenue le 8 juin 1972 devant la Commission d'examen

C. CHABAUTY Président

M. BLAMBERT

M. KAHANE Examinateurs

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Jean SIMEON

FAMILLES NORMALES DE GERMES DIRICHLETIENS

GERMES DIRICHLETIENS A EXPOSANTS COMPLEXES

Soutenue le 8 juin 1972 devant la Commission d'examen

C. CHABAUTY Président
M. BLAMBERT
M. KAHANE Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

S O M M A I R E

Pages

INTRODUCTION

CHAPITRE I 1

CHAPITRE II 12

CHAPITRE III 21

CHAPITRE IV 35

CHAPITRE V 61

BIBLIOGRAPHIE 93

INTRODUCTION

L'objet initial de ce travail est l'étude des familles normales de germes dirichlétiens $s \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \exp(-s\lambda_n)$, $f \in \mathcal{F}$.

Pour les germes dont la suite des exposants $\{\lambda_n\}$ est réelle positive croissante, le travail est facilité par l'existence de résultats classiques nombreux : c'est l'objet des trois premiers chapitres.

Si la suite des exposants est complexe, il n'en est pas de même ; dans la plupart des mémoires existant sur la question, des hypothèses très restrictives sont faites, soit sur les arguments des exposants, soit sur la rapidité de la croissance de la suite $\{|\lambda_n|\}$, de manière à pouvoir utiliser, sans trop de changement, les méthodes classiques pour les germes à exposants réels positifs. C'est ce qui m'a amené à consacrer les deux derniers chapitres à l'étude des germes dirichlétiens à exposants complexes dans l'optique de Gallie, pour obtenir des résultats sans hypothèse sur les arguments des exposants, ou avec des hypothèses assez faibles sur la rapidité de la croissance de la suite des exposants.

Dans le premier chapitre, on introduit, entre autre notions nouvelles, celles de demi-plan, de droite et d'abscisse de régularité d'une part, et similairement, de suprarégularité d'autre part pour une famille de germes dirichlétiens. Les notions classiques de demi-plans, droites et abscisses simple ou uniforme d'un germe dirichlétien se présentent comme des cas particuliers de ces notions. On exprimerait des remarques analogues, avec des précautions convenables, pour l'ultra-convergence. On donne ensuite des expressions de majorants des abscisses de régularité et de suprarégularité, en utilisant la forme algorithmique donnée par M. Blambert à un résultat du à Kojima.

.../...

Dans le deuxième chapitre, on énonce des conditions suffisantes pour que les abscisses de régularité et de suprarégularité soient égales, et on généralise des résultats dus à Landau et Fekete. On énonce ensuite des relations de dépendance entre les différentes abscisses considérées d'une famille.

Dans le troisième chapitre, on introduit la notion de sur-disque de régularité, et on l'utilise pour mettre en évidence l'existence d'un majorant intéressant du rayon de régularité d'une famille de germes tayloriens et dans certain cas pour donner une autre expression de ce même rayon de régularité ; on utilise ensuite ces résultats pour retrouver certains résultats du chapitre II, et pour étudier le comportement d'une famille de germes dirichlétiens au voisinage d'une droite caractéristique de cette famille.

Les deux derniers chapitres sont consacrés à l'étude des germes dirichlétiens à exposants complexes.

Dans le quatrième chapitre, après avoir précisé et développé certains résultats de Gallie [7] , on introduit et étudie une application auxiliaire $z \to L_{*,s}(z)$, qui permet de caractériser le domaine maximal de convergence absolue lorsque L $(= \limsup(\log n)/|\lambda_n|)$ est fini.

Dans le cinquième chapitre on étudie plus particulièrement les relations existant entre la forme du domaine maximal de convergence absolue et les arguments de la suite des exposants. Ces relations sont plus précises et se traduisent par des conditions nécessaires et suffisantes dans le cas où L est fini. Ces résultats permettent de majorer, soit la somme des n premiers termes, soit le reste d'ordre n par une exponentielle. Enfin, on utilise ces majorants pour étudier les séries lacunaires du type Ostrowski, sans condition sur L et sur les arguments des exposants, et généraliser les résultats analogues que Gallie [8] a obtenus dans le cas où L est nul et où les arguments des exposants tendent vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Je remercie très vivement Monsieur le Professeur CHABAUTY, qui a bien voulu présider le jury de cette thèse. Je n'oublie pas que c'est à lui que je dois de travailler à la Faculté des Sciences.

Je prie Monsieur le Professeur BLAMBERT de croire à l'expression de ma très profonde gratitude ; sans ses conseils, je n'aurais espéré mener ce travail à son terme.

Je remercie Monsieur le Professeur KAHANE de s'être déplacé spécialement de Paris pour participer au jury.

Enfin, je remercie Madame GUTTIN-LOMBARD pour sa coopération et sa compréhension dans la dactylographie du manuscrit.

CHAPITRE I

σ_o étant une constante appartenant à $\mathbb{R}$, on considère une famille -que l'on désigne par $\mathcal{F}_{\sigma_o}$ - d'applications du demi-plan $P_{\sigma_o} = \{s\in\mathbb{C} \mid s = \sigma+i\tau \text{ , avec } \sigma = \Re s \text{ et } \tau = \Im s \text{ , } \sigma > \sigma_o\}$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que toute application $f \in \mathcal{F}_{\sigma_o}$ est holomorphe sur le support P_{σ_o} commun aux applications de la famille $\mathcal{F}_{\sigma_o}$. Afin de ne pas exclure ultérieurement le cas $\sigma_o = -\infty$ et par analogie avec les notations ci-dessus, si on considère plus particulièrement une famille -que l'on désigne par $\mathcal{F}_{-\infty}$- d'applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, holomorphes sur $\mathbb{C}$, on convient de désigner, à l'occasion, $\mathbb{C}$ par $P_{-\infty}$ ou par

$$\{s\in\mathbb{C}|\sigma>-\infty\} \ .$$

S'il existe $h \in [\sigma_o,+\infty[$ tel que le demi-plan $P_h = \{s\in\mathbb{C}|\sigma>h\}$ est un domaine de régularité pour $\mathcal{F}_{\sigma_o}$ (où σ_o peut être égal à $-\infty$) , on désigne alors par $\mathcal{H}_R^{\mathcal{F}_{\sigma_o}}$ l'ensemble des nombres h pour lesquels les P_h correspondants sont des domaines de régularité pour $\mathcal{F}_{\sigma_o}$. On désigne par $\sigma_R^{\mathcal{F}_{\sigma_o}}$ l'infimum de l'ensemble $\mathcal{H}_R^{\mathcal{F}_{\sigma_o}}$ si cet ensemble est borné inférieurement (l'ensemble $\mathcal{H}_R^{\mathcal{F}_{\sigma_o}}$ est nécessairement borné inférieurement si $\sigma_o > -\infty$) ; sinon on pose $\sigma_R^{\mathcal{F}_{-\infty}} = -\infty$. Si et seulement s'il n'existe aucun $h > \sigma_o$ tel que P_h est un domaine de régularité pour $\mathcal{F}_{\sigma_o}$, on pose $\sigma_R^{\mathcal{F}_{\sigma_o}} = +\infty$. Il est trivial que $\sigma_R^{\mathcal{F}_{\sigma_o}} \geq \sigma_o$.

Si $\sigma_R^{\mathcal{F}_{\sigma_o}} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, l'ensemble $\{s\in\mathbb{C}|\sigma>\sigma_R^{\mathcal{F}_{\sigma_o}}\}$ est appelé "<u>le demi-plan de régularité de</u> $\mathcal{F}_{\sigma_o}$ ". Si $\sigma_R^{\mathcal{F}_{\sigma_o}} = +\infty$, on dit que "<u>le demi-plan de</u>

de régularité de $\mathcal{F}_{\sigma_o}$ est vide ". Si $\sigma_R^{\mathcal{F}_{\sigma_o}} \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{s\in\mathbb{C} \mid s = \sigma_R^{\mathcal{F}_{\sigma_o}} + i\tau\}$ est appelé "l'axe (ou la droite de régularité) de $\mathcal{F}_{\sigma_o}$" .

Remarque.-

Le demi-plan de régularité de la famille $\mathcal{F}_{\sigma_o}$ est un domaine de régularité pour cette famille. En effet, tout point de ce demi-plan possède un voisinage compact contenu dans ce demi-plan. $\mathcal{F}_{\sigma_o}$ est donc régulier en tout point de ce demi-plan.

On considère un domaine $D \subset P_{\sigma_o}$ où $\sigma_o \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Si de toute suite infinie d'applications extraites de $\mathcal{F}_{\sigma_o}$, on peut extraire une sous-suite infinie uniformément convergente sur toute partie $\mathcal{E}$ de D , fermée dans $\mathbb{C}$, vers la restriction à $\mathcal{E}$ d'une certaine application holomorphe sur D , ou vers l'infini, alors d est appelé un "domaine de suprarégularité pour $\mathcal{F}_{\sigma_o}$".

Remarque.-

Il est évident que tout domaine D de suprarégularité de $\mathcal{F}_{\sigma_o}$ est un domaine de régularité pour cette famille. Si D est un domaine "borné" de régularité pour $\mathcal{F}_{\sigma_o}$ alors D est aussi un domaine de suprarégularité pour cette famille.

Procédant comme ci-dessus, s'il existe un nombre

$$h(\geq\sigma_o\geq-\infty) \in \mathbb{R}$$

tel que le demi-plan P_h est un domaine de suprarégularité pour $\mathcal{F}_{\sigma_o}$, on désigne alors par $\mathcal{H}_s^{\mathcal{F}_{\sigma_o}}$ l'ensemble des nombres h pour lesquels les P_h sont des domaines de suprarégularité pour $\mathcal{F}_{\sigma_o}$. Si $\mathcal{H}_s^{\mathcal{F}_{\sigma_o}}$ est borné inférieurement (il est trivial que cet ensemble est nécessairement borné inférieurement si $\sigma_o > -\infty$) , on désigne par $\sigma_s^{\mathcal{F}_{\sigma_o}}$ son infimum ; sinon (on a alors nécessairement $\sigma_o = -\infty$) on pose $\sigma_s^{\mathcal{F}_{-\infty}} = -\infty$. Si et seulement s'il n'existe aucun $h(>\sigma_o) \in \mathbb{R}$ tel que P_h est un domaine de suprarégularité pour $\mathcal{F}_{\sigma_o}$, on pose $\sigma_s^{\mathcal{F}_{\sigma_o}} = +\infty$. Il est trivial que $\sigma_s^{\mathcal{F}_{\sigma_o}} \geq \sigma_o$. Si $\sigma_s^{\mathcal{F}_{\sigma_o}} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, l'ensemble

$$\{s\in\mathbb{C} \mid \sigma>\sigma_s^{\mathcal{F}_{\sigma_o}}\}$$

est appelé "le demi-plan de suprarégularité de $\mathcal{F}_{\sigma_o}$ ". Si $\sigma_s^{\mathcal{F}_{\sigma_o}} = +\infty$, on dit

que "le demi-plan de suprarégularité de $\mathcal{F}_{\sigma_o}$ est vide".

Si $\sigma_s^{\mathcal{F}_{\sigma_o}} \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{s\in\mathbb{C} \mid s = \sigma_s^{\mathcal{F}_{\sigma_o}} + i\tau\}$ est appelé "l'axe (ou droite) de suprarégularité de $\mathcal{F}_{\sigma_o}$".

Il est trivial que $\sigma_R^{\mathcal{F}_{\sigma_o}} \leq \sigma_s^{\mathcal{F}_{\sigma_o}}$.

On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ d'applications holomorphes sur leurs domaine-support $D \subset \mathbb{C}$ est une pseudo-famille si et seulement si à deux applications quelconques f_1 et f_2 considérées) tel que :

$$\forall z \in D : f_1(z) - f_2(z) = c_{1,2} .$$

On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ d'applications holomorphes sur leur domaine-support D est une "vraie" famille si $\mathcal{F}$ ne contient aucune sous-famille $\mathcal{F}_1$ qui est une pseudo-famille.

Remarque.-

Si $\sigma_s^{\mathcal{F}_{\sigma_o}} = -\infty$ (σ_o est nécessairement alors égal à $-\infty$) , le demi-plan de suprarégularité qui est alors identique à $\mathbb{C}$ ne peut être un domaine de suprarégularité pour $\mathcal{F}_{\sigma_o}$ si cette famille est une "vraie famille" ou, plus généralement, si $\mathcal{F}_{\sigma_o}$ contient une sous-famille infinie qui est une "vraie famille".

(λ_n) étant une D-suite où $\lambda_1 > 0$, on considère une famille -que l'on note Φ - d'éléments dirichlétiens,

$$\{f\} : \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\exp(-s\lambda_n) \text{ , où } s = \sigma + i\tau \text{ , } \sigma \text{ et } \tau \in \mathbb{R} .$$

$\{f\}$ est l'al-germe-D d'un germe dirichlétien -que l'on note $\{f;P_c^f\}$ - de fonction analytique dans $\mathbb{C}$. Dans le doublet $\{f;P_c^f\}$, P_c^f désigne l'ouvert maximal de convergence de $\{f\}$ (cet ouvert est l'ensemble $\{s\in\mathbb{C} \mid \sigma>\sigma_c^f\}$, où σ_c^f est l'abscisse de convergence simple de $\{f\}$) et f désigne l'application suivante de support P_c^f à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$s \longrightarrow f(s)$$

où $f(s)$ est la valeur de $\{f\}$ en $s \in P_c^f$. On désigne par $\mathcal{F}$ la famille,

associée à Φ , des applications f . On supposera explicitement dans l'énoncé de certaines propriétés ultérieures que la condition suivante dite "condition (a) " est satisfaite

$$\forall n \in N_+ \ , \ \exists A_n \in [0,+\infty[\ : A_n = \mathrm{Sup} \ |a_n(f)| \ , \ f \in \mathcal{F} \ .$$

On désigne par $\mathcal{E}_f$ l'étoile rectiligne de Riesz définie à l'aide du germe $\{f;P_c^f\}$. Indifféremment on convient de dire que $\mathcal{E}_f$ est "l'étoile rectiligne de Riesz de f ", ou de $\{f\}$ ". On note f_A la fonction analytique dont $\{f;P_c^f\}$ est un germe, et $f_{\mathcal{E}}$ la restriction de f_A à $\mathcal{E}_f$ qui satisfait aux conditions suivantes :

1) $f_{\mathcal{E}}$ est holomorphe sur $\mathcal{E}_f$.

2) $f_{\mathcal{E}}(s)$ désignant la valeur de $f_{\mathcal{E}}$ au point $s \in \mathcal{E}_f$, on a,

$$\forall s \in P_c^f \ : f_{\mathcal{E}}(s) = f(s) \ .$$

$f_{\mathcal{E}}$ est la restriction à $\mathcal{E}_f$ de la branche principale de f_A .

Remarque 1.-

Considérant un élément dirichlétien $\{f\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-s\lambda_n) \ ,$$

on désigne par $\{f_p\}$ le polynôme-section d'indice $p \in N_+$,

$$\sum_{n=1}^{p} a_n \exp(-s\lambda_n) \ ,$$

par Φ_f la suite $(\{f_p\})$, et par $\mathcal{F}_f$ la suite des applications entières (f_p) , avec $f_p : s \longrightarrow f_p(s)$, où $f_p(s)$ est la valeur en $s \in \mathbb{C}$ de $\{f_p\}$. (On peut considérer $\{f_p\}$ comme un al-germe-D dont la suite des exposants est la D-suite (λ_n) et dont les coefficients d'indices strictement supérieurs à p sont tous nuls, et donc $\sigma_c^{f_p} = \sigma_A^{f_p} = -\infty$) . On sait que $\{f\}$ converge uniformément sur le secteur

$$S_{s_o,\theta} = \{s \in \mathbb{C} \, | \, |\mathrm{Arg}(s-s_o)| \leq \theta\}$$

indexé par le doublet (s_o,θ) , où $s_o = \sigma_o + i\tau_o$, avec $\sigma_o \in]\sigma_c^f,+\infty[$ et $\tau_o \in \mathbb{R}$, et où $\theta \in]0,\pi/2[$. Quel que soit le compact $C \subset P_c^f$, on peut

toujours trouver s_o et θ satisfaisant aux conditions ci-dessus et tels que $\mathcal{C} \subset S_{s_o,\theta}$; il en résulte que $\sigma_R^{\mathcal{F}_f} \leq \sigma_c^f$. On suppose $\sigma_R^{\mathcal{F}_f} < \sigma_c^f$ et soit $\sigma_1 \in]\sigma_R^{\mathcal{F}_f}, \sigma_c^f[$. Le demi-plan $P_{\sigma_1} = \{s \in \mathbb{C} | \sigma > \sigma_1\}$ est un domaine de régularité pour $\mathcal{F}_f$. Soit un point s' avec $\sigma' \in]\sigma_1, \sigma_c^f[$. A ce point, on peut associer une suite infinie d'entiers (P_j) , strictement croissante et telle que $\lim |f_{P_j}(s')| = +\infty$ (en effet, dans le cas contraire, il existerait un nombre (fini) strictement positif M tel que

$$\forall p \in N_+ : |f_p(s')| < M ,$$

et on sait qu'alors $\{f\}$ convergerait en chaque point

$$s \in P_{\sigma'} = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \sigma'\} ;$$

ce qui est impossible puisque $\sigma' < \sigma_c^f$) . On considère maintenant le demi-plan $P_{\sigma_2} = \{s \in \mathbb{C} | \sigma > \sigma_2\}$, où $\sigma_2 \in]\sigma_R^{\mathcal{F}_f}, \sigma'[$. P_{σ_2} étant un domaine de régularité pour $\mathcal{F}_f$, de la suite (f_{P_j}) on peut extraire une sous-suite uniformément convergente sur tout compact $\mathcal{C} \subset P_{\sigma_2}$. Choisissant $\mathcal{C} \ni s'$ et satisfaisant en outre à la condition, $\mathcal{C}^o \cap P_c^f \neq \phi$, toute sous-suite infinie extraite de (f_{P_j}) converge uniformément vers une fonction holomorphe sur tout domaine appartenant à $\mathcal{C} \cap P_c^f$. Il y a contradiction et donc $\sigma_R^{\mathcal{F}_f} \geq \sigma_c^f \Rightarrow \sigma_R^{\mathcal{F}_f} = \sigma_c^f$. Il est trivial que $\sigma_s^{\mathcal{F}_f} = \sigma_u^f$ (où σ_u^f désigne, comme il est usuel, l'abscisse de convergence uniforme de f).

Remarque 2.-

Eu égard à la manière dont les abscisses de régularité et de suprarégularité d'une famille $\mathcal{F}$ ont été définies, on se limitera, pour les éléments de la famille particulière $\mathcal{F}$ considérée dans ce chapitre et les suivants, à leurs restrictions au demi-plan

$$\{s \in \mathbb{C} | \sigma > \sup \sigma_c^f , f \in \mathcal{F}\}$$

(en le supposant non vide). On désignera encore par $\mathcal{F}$ la famille des restrictions des applications f à ce demi-plan (ces restrictions sont évidemment toutes holomorphes sur leur demi-plan support commun).

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : n[x] = \operatorname{Min} \{n \in \mathbb{N}_+ | \lambda_n \geq [x]\}$$
$$n(x) = \operatorname{Max} \{n \in \mathbb{N}_+ | \lambda_n < x,\ x > \lambda_1\}$$
$$= 0 , \quad \forall x \in [0, \lambda_1] ,$$

où $[x]$ désigne, comme il est usuel, le plus grand des entiers inférieurs à x . On rappelle que M. Blambert a donné une démonstration nouvelle d'un algorithme de Kojima et l'a condensé, entre autres formes, sous la suivante : le nombre $\alpha \in [-\infty, +\infty]$ étant donné, une condition nécessaire et suffisante pour que l'élément $\{f\}$ ait une abscisse de convergence simple égale à α est que

$$\alpha = \limsup_{\mathbb{R}_\lambda \ni x \uparrow +\infty} \{\log [\operatorname{Max}_{k \in \{n[x], \ldots, n(x)\}} | \sum_{n=n[x]}^{k} a_n(f) |] / \lambda_{n[x]} \} ,$$

où $\mathbb{R}_\lambda$ désigne l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}_+ | n[x] \leq n(x)\}$. Il est trivial que dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus, on peut remplacer indifféremment, $\lambda_{n[x]}$ par $\lambda_{n(x)}$ (et plus généralement par $\mu_{n[x]}$; la suite (μ_n) satisfaisant à la condition : $\lim \{\mu_n / \lambda_n\} = 1$, $n \uparrow \infty$. Il n'est pas dans notre propos de nous étendre sur ce point), $[x]$, x . On désigne par $\mathfrak{N}$ le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ suivant :

$$\{p \in \mathbb{N} | n[p] \leq n(p+1)\} .$$

On constatera qu'on peut remplacer l'égalité qui figure dans l'énoncé de la condition nécessaire et suffisante par la suivante qu'on utilisera de préférence dans ce qui suit :

$$\alpha = \limsup_{\mathfrak{N} \ni p \uparrow \infty} \{\log [\operatorname{Max}_{k \in \{n[p], \ldots, n(p+1)\}} | \sum_{n=n[p]}^{k} a_n(f) |] / \lambda_{n[p]} \} .$$

La condition $(\mathcal{A})$ étant supposée satisfaite, on pose :

$$\sigma^{\mathcal{F}} = \limsup_{\mathfrak{N} \ni p \uparrow \infty} \{\log [\operatorname{Max}_{k \in \{n[p], \ldots, n(p+1)\}} \sup_{f \in \mathcal{F}} | \sum_{n=n|p|}^{k} a_n(f) |] / \lambda_{n[p]} \} ,$$

(Comme on l'a fait observer antérieurement, on ne modifie pas la valeur de $\sigma^{\mathcal{F}}$ en substituant, dans cet algorithme, $\mu_{n[p]}$ à $\lambda_{n[p]}$, la suite (μ_n) satisfaisant à la condition : $\lim \{\mu_n / \lambda_n\} = 1$, $n \uparrow \infty$)
$\forall p \in \mathfrak{N}$ et $\forall k \in \{n[p], \ldots, n(p+1)\}$ on pose :

$$B_k = \sup\Big|\sum_{n=n[p]}^{k} a_n(f)\Big| \quad , \quad f \in \mathcal{F} \quad .$$

(Eu égard à la définition de A_n , on a : $A_{n[p]} = B_{n[p]}$, $\forall p \in \mathbb{N}$) . On considère la suite (c_n) définie par la condition

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \{n[p],\ldots,n(p+1)\} : \sum_{m=n[p]}^{k} c_m = \operatorname{Max}_{r\in\{n[p],\ldots,k\}} B_r \quad .$$

Il est trivial que la constante $c_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_+$, est univoquement définie par les conventions ci-dessus et que la condition $(\mathcal{C})$ est équivalente à la suivante :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \{n[p],\ldots,n(p+1)\} : B_k < +\infty \quad .$$

Eu égard, pour $k > n[p]$, à l'identité d'Abel suivante :

$$\sum_{n=n[p]}^{k} a_n(f)\exp(-\sigma_o\lambda_n) =$$

$$\Big[\sum_{n=n[p]}^{k} a_n(f)\Big]\exp(-\sigma_o\lambda_k) + \sum_{t=n[p]}^{k-1}\Big[\sum_{n=n[p]}^{t} a_n(f)\Big]\left[\exp(-\sigma_o\lambda_t)-\exp(-\sigma_o\lambda_{t+1})\right]$$

et puisque

$$\Big|\sum_{n[p]}^{k} a_n(f)\Big| \leq \sum_{n[p]}^{k} c_n \quad ,$$

le premier membre de la relation d'Abel est majoré par

$$\Big[\sum_{n=n[p]}^{k} c_n\Big]\exp(-\sigma_o\lambda_k) + \sum_{t=n[p]}^{k-1}\Big[\sum_{n=n[p]}^{t} c_n\Big]\left|\exp(-\sigma_o\lambda_t)-\exp(-\sigma_o\lambda_{t+1})\right|$$

si $\sigma_o \geq 0$, on a,

$$\Big|\sum_{n=n[p]}^{k} a_n(f)\exp(-\sigma_o\lambda_n)\Big| \leq \sum_{n=n[p]}^{k} c_n \exp(-\sigma_o\lambda_n) \quad .$$

Cette relation reste valable dans le cas $k = n[p]$ puisqu'alors

$$c_{n[p]} = A_{n[p]} \quad .$$

(Il est trivial que c_n n'est pas nécessairement un majorant de $|a_n(f)|$; en

effet, pour certaines valeurs de n , on peut avoir $c_n = 0$ alors que $a_n(f) \neq 0$).

Si $\sigma_o < 0$, on a,

$$\left| \sum_{n=n[p]}^{k} a_n(f)\exp(-\sigma_o\lambda_n) \right| \leq 2\left(\sum_{n=n[p]}^{k} c_n \right) \exp(-\sigma_o\lambda_k)$$

$$< 2\left(\sum_{n=n[p]}^{k} c_n \right) \exp(-\sigma_o\lambda_{n[p]} - \sigma_o)$$

$$< 2\exp(-\sigma_o) \sum_{n=n[p]}^{k} c_n \exp(-\sigma_o\lambda_n) \quad .$$

Cette dernière inégalité reste valable dans le cas $k = n[p]$.

Proposition I.1.

Si $\sigma^{\mathcal{F}} < +\infty$ et σ_o étant une constante choisie strictement supérieure à $\sigma^{\mathcal{F}}$, la famille $\mathcal{F}$ est bornée sur le secteur $\{s\in\mathbb{C} \mid |\mathrm{Arg}(s-\sigma_o)| \leq \theta\}$, indexé par θ sur $]0,\pi/2[$, et $\sigma^{\mathcal{F}} \geq \sigma_R^{\mathcal{F}}$.

Pour $k > n[p]$, on considère l'identité d'Abel suivante,

$$\sum_{n[p]}^{k} a_n(f)\exp(-s\lambda_n) = \left[\sum_{n[p]}^{k} a_n(f)\exp(-\sigma_o\lambda_n) \right] \exp[-(s-\sigma_o)\lambda_k] +$$

$$\sum_{t=n[p]}^{k-1} \left[\sum_{n[p]}^{t} a_n(f)\exp(-\sigma_o\lambda_n) \right] \{\exp[-(s-\sigma_o)\lambda_t] - \exp[-(s-\sigma_o)\lambda_{t+1}]\}$$

où $\sigma > \sigma_o$. On a, comme il est évident,

$$|\exp[-(s-\sigma_o)\lambda_t] - \exp[-(s-\sigma_o)\lambda_{t+1}]| \leq [|s-\sigma_o|/(\sigma-\sigma_o)] \{\exp[-(\sigma-\sigma_o)\lambda_t] - \exp[-(\sigma-\sigma_o)\lambda_{t+1}]$$

Eu égard à une majoration antérieure, on obtient si $\sigma_o \geq 0$,

$$\left| \sum_{n[p]}^{k} a_n(f)\exp(-s\lambda_n) \right| \leq [|s-\sigma_o|/(\sigma-\sigma_o)] \sum_{n[p]}^{k} c_n \exp(-\sigma\lambda_n) +$$

$$\{1-[|s-\sigma_o|/(\sigma-\sigma_o)]\}\exp[-(\sigma-\sigma_o)\lambda_k] \sum_{n[p]}^{k} c_n \exp(-\sigma_o\lambda_n) \quad ,$$

et, puisque $|s-\sigma_o|/(\sigma-\sigma_o) \geq 1$, le membre de gauche est majoré par

$$[|s-\sigma_o|/(\sigma-\sigma_o)] \sum_{n[p]}^{k} c_n \exp(-\sigma\lambda_n) .$$

Pour $\sigma_o > \sigma^{\mathcal{F}}$ et $\theta \in]0,\pi/2[$, on a donc,

$$\forall s \in \{s\in\mathbb{C} \mid |\mathrm{Arg}(s-\sigma_o)| \leq \theta\} : |f(s)| \leq \varphi(\sigma)/\cos\theta ,$$

où $\varphi(\sigma)$ désigne la valeur en σ de l'élément

$$\{\varphi\} : \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-s\lambda_n) .$$

Si $\sigma_o < 0$ les majorations obtenues ci-dessus sont encore valables en affectant du coefficient $2\exp(-\sigma_o)$ l'expression

$$\sum_{n=n[p]}^{k} c_n \exp(-\sigma\lambda_n)$$

partout où elle figure ; alors sous les mêmes conditions relatives à s et θ , et avec $\sigma_o > \sigma^{\mathcal{F}}$, on a,

$$|f(s)| \leq 2\exp(-\sigma_o)\varphi(\sigma)/\cos\theta .$$

La famille $\mathcal{F}$ est donc bornée sur le secteur $\{s\in\mathbb{C} \mid |\mathrm{Arg}(s-\sigma_o)| \leq \theta\}$ indexé par le doublet (θ,σ_o) , avec θ sur $]0,\pi/2[$ et $\sigma_o > \sigma^{\mathcal{F}}$. Il en résulte que $\mathcal{F}$ est bornée sur tout compact de l'ouvert maximal de convergence de l'élément $\{\varphi\}$. Ce demi-plan est donc un domaine de régularité pour la famille $\mathcal{F}$. Or $\sigma^{\mathcal{F}}$ n'est autre que l'abscisse de convergence de $\{\varphi\}$ et donc $\sigma_R^{\mathcal{F}} \leq \sigma^{\mathcal{F}}$. (Il est trivial que $\sigma^{\mathcal{F}} \geq \sup \sigma_c^f$, $f \in \mathcal{F}$) . La condition $\sigma^{\mathcal{F}} < +\infty$, et "a fortiori" la condition que l'on introduira ultérieurement $\sigma_*^{\mathcal{F}} < +\infty$, impliquent que la condition (α) est satisfaite.

On pose

$$\sigma_*^{\mathcal{F}} = \limsup_{\mathfrak{N}\ni p\uparrow\infty} \{\log[\sup_{f\in\mathcal{F}} \sum_{n=n[p]}^{n(p+1)} |a_n(f)|]/\lambda_{n[p]}\} .$$

Il est trivial que $\sigma_*^{\mathcal{F}} \geq \sup \sigma_A^f$, $f \in \mathcal{F}$.

Proposition I.2.

Si $\sigma_*^{\mathcal{F}} < +\infty$ et σ_o étant une constante strictement supérieure à $\sigma_*^{\mathcal{F}}$, la famille $\mathcal{F}$ est bornée sur le demi-plan $\{s\in\mathbb{C} \mid \sigma\geq\sigma_o\}$ et $\sigma_*^{\mathcal{F}} \geq \sigma_s^{\mathcal{F}}$.

On considère la suite (c'_n) définie d'une manière analogue à la suite (c_n) par la condition suivante :

$$\forall p \in \mathfrak{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \{n[p],\dots,n(p+1)\} : \sum_{n=n[p]}^{k} c'_n = \operatorname*{Max}_{t\in\{n[p],\dots,k\}} \{\sup \sum_{n=n[p]}^{t} |a_n(f)|, f\in\mathcal{F}$$

Il est trivial que

$$\sum_{n=n[p]}^{k} c'_n = \operatorname{Sup} \sum_{n=n[p]}^{k} |a_n(f)| \quad , \ f \in \mathcal{F} \ .$$

On considère l'élément dirichlétien

$$\{\psi\} : \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \exp(-s\lambda_n) \ .$$

$\sigma_*^{\mathcal{F}}$ est l'abscisse de convergence de $\{\psi\}$.

Eu égard aux majorations préliminaires à la proposition (I.1), on a pour chaque s avec $\sigma \geq \sigma_o$:

$$|f(s)| \leq \psi(\sigma_o) \quad \text{si} \quad \sigma_o \geq 0$$

et

$$|f(s)| \leq 2 \exp(-\sigma_o)\psi(\sigma_o) \quad \text{si} \quad \sigma_o < 0$$

où $\psi(\sigma_o)$ est la valeur en σ_o de l'élément $\{\psi\}$.

On considère l'élément dirichlétien

$$\{\theta\} : \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-s\lambda_n) \ ,$$

et on pose

$$L = \limsup \{\log n/\lambda_n\} \ , \ n\uparrow\infty \ .$$

Remarque.-

Il est trivial que :

$$\sigma^{\mathcal{F}} \leq \sigma_*^{\mathcal{F}} \leq \sigma_c^{\theta} \ .$$

Proposition I.3.

Si $\sigma_c^{\theta} < +\infty$, *on a* :

$$\sigma_c^{\theta} - \sigma^{\mathcal{F}} \leq L \ .$$

Pour $p \in \mathfrak{N}$, et dans le cas $n[p] < n(p+1)$, on a,

$$\forall r \in \{n[p]+1,\ldots,n(p+1)\} : a_r(f) = \sum_{n=n[p]}^{r} a_n(f) - \sum_{n=n[p]}^{r-1} a_n(f) \quad ,$$

et donc

$$|a_r(f)| \leq 2 \sum_{n=n[p]}^{n(p+1)} c_n \Rightarrow A_r \leq 2 \sum_{n=n[p]}^{n(p+1)} c_n \quad .$$

(Cette dernière inégalité est "a fortiori" légitime dans le cas

$$r = n[p] = n(p+1)$$

puisqu'alors $C_{n[p]} = A_{n[p]}$) . Par conséquent, on a,

$$\sum_{n=n[p]}^{n(p+1)} A_n \leq 2\{n(p+1)+1 - n[p]\} \sum_{n=n[p]}^{n(p+1)} c_n \leq 2n(p+1) \sum_{n=n[p]}^{n(p+1)} c_n \quad .$$

Utilisant l'algorithme de Kojima, on obtient,

$$\sigma_c^{\theta} \leq \limsup_{\mathfrak{N} \ni p \uparrow \infty} \{\log[\sum_{n=n[p]}^{n(p+1)} c_n]/\lambda_{n[p]}\} + \limsup\{\log n(p+1)/\lambda_{n[p]}\} \quad ,$$

et donc,

$$\sigma_c^{\theta} \leq \sigma^{\mathcal{F}} + L \quad .$$

Il est trivial que la condition $L = 0$ implique l'égalité : $\sigma^{\mathcal{F}} = \sigma_*^{\mathcal{F}} = \sigma_c^{\theta}$.

Remarque.-

Ce résultat est à rapprocher de l'analogue bien connu relatif à la différence des abscisses de convergence simple et absolue d'une série de Dirichlet générale.

CHAPITRE II

Dans ce chapitre, on se propose de trouver des relations de dépendance entre les différentes abscisses attachées à une famille. On considère une famille Φ d'éléments $\{f\}$ satisfaisant à la condition $(\mathcal{A})$. On énonce :

Proposition II.1.

Sous les conditions :

1) les éléments $\{f\}$ de la famille Φ sont à coefficients positifs,

2) $\sigma^{\mathcal{F}} < +\infty$

alors

$$\sigma_s^{\mathcal{F}} = \sigma_R^{\mathcal{F}} = \sigma^{\mathcal{F}} = \sigma_*^{\mathcal{F}} \quad .$$

Les coefficients $a_n(f)$ étant positifs, il est trivial que pour $p \in \mathbb{N}$:

$$\forall k \in \{n[p],\ldots,n(p+1)\} : \sup_{f\in\mathcal{F}} \sum_{n[p]}^{k} a_n(f) \leq \sup_{f\in\mathcal{F}} \sum_{n[p]}^{n(p+1)} a_n(f) = \sum_{n[p]}^{n(p+1)} c_n \quad ,$$

et que $\{\varphi\} = \{\psi\}$, $\sigma^{\mathcal{F}} = \sigma_*^{\mathcal{F}}$. La proposition (II.1) est triviale si $\sigma^{\mathcal{F}} = -\infty$. On considère le cas où $\sigma^{\mathcal{F}}$ est fini, et on pose :

$$\sigma^{*\mathcal{F}} = \sup \sigma_c^f \quad , \quad f \in \mathcal{F} \ .$$

Il est trivial que $\sigma^{*\mathcal{F}} \leq \sigma^{\mathcal{F}}$. L'égalité $\sigma^{*\mathcal{F}} = \sigma^{\mathcal{F}}$ implique trivialement la légitimité de l'assertion de la proposition (II.1) ; il suffit d'étudier le cas $\sigma^{*\mathcal{F}} < \sigma^{\mathcal{F}}$. Soient alors un nombre $\sigma_o \in]\sigma^{*\mathcal{F}}, \sigma^{\mathcal{F}}[$ et un nombre $\varepsilon \in]0, \sigma^{\mathcal{F}} - \sigma_o[$. A ce nombre ε , on peut associer une suite infinie strictement croissante d'entiers, (P_j) , telle que

$$\log\Big[\sum_{n=n[P_j]}^{n(P_j+1)} c_n\Big]^{1/\lambda_{n[P_j]}} > \sigma^{\mathcal{F}} - \varepsilon \quad .$$

Soit un nombre $\varepsilon' \in]0, \exp(\sigma^{\mathcal{F}}-\varepsilon) - \exp(\sigma_o)[$. A chaque entier P_j on peut associer une application -que l'on note f_{P_j}- de la famille $\mathcal{F}$ telle que :

$$\left[\sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} a_n(f_{P_j})\right]^{1/\lambda_{n[P_j]}} > \left[\sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} c_n\right]^{1/\lambda_{n[P_j]}} - \varepsilon' .$$

Eu égard aux choix des constantes strictement positives ε et ε' , on a donc,

$$\exp(-\sigma_o)\left[\sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} a_n(f_{P_j})\right]^{1/\lambda_{n[P_j]}} > \exp(\sigma^{\mathcal{F}}-\sigma_o-\varepsilon) - \varepsilon' \exp(-\sigma_o) > 1 .$$

L'expression

$$\exp(-\sigma_o\lambda_{n[P_j]}) \sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} a_n(f_{P_j})$$

tend vers $+\infty$ lorsque $P_j \uparrow \infty$. On a deux cas possibles :

$$\sigma_o \leq 0 : f_{P_j}(\sigma_o) \geq \sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} a_n(f_{P_j}).\exp(-\sigma_o\lambda_n) \geq \exp(-\sigma_o\lambda_{n[P_j]}) \sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} a_n(f_{P_j})$$

$$\sigma_o > 0 : f_{P_j}(\sigma_o) \quad " \quad > \exp[-\sigma_o(1+\lambda_{n[P_j]})] \sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} a_n(f_{P_j}) .$$

La suite (f_{P_j}) et toute sous-suite infinie extraite de cette suite ne sont pas bornées au point σ_o . Ce résultat étant légitime $\forall \sigma_o \in]\sigma^{*\mathcal{F}}, \sigma^{\mathcal{F}}[$, la famille $\mathcal{F}$ est donc non bornée au voisinage du point $\sigma^{\mathcal{F}}$ (on remarquera qu'en chaque point s de l'ouvert maximal de convergence de $\{\varphi\}$ -cet ouvert n'est autre que le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \sigma^{\mathcal{F}}\}$- on peut trouver un disque centré en ce point (et donc une infinité) sur lequel $\mathcal{F}$ est bornée). Ce point $\sigma^{\mathcal{F}}$ est irrégulier pour $\mathcal{F}$ et donc

$$\sigma_R^{\mathcal{F}} = \sigma_s^{\mathcal{F}} = \sigma^{\mathcal{F}} .$$

A chaque élément $\{f\}$ de la famille Φ , on associe l'élément suivant :

$$\{f^*\} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)| \exp(-s\lambda_n)$$

et on désigne par Φ^* la famille de ces éléments, et par $\mathcal{F}^*$ la famille des

applications

$$s \longrightarrow f^*(s) \quad ,$$

où $f^*(s)$ est la valeur de $\{f^*\}$ en tout point $s \in P_c^{f^*}$ (ouvert maximal de convergence de $\{f^*\}$) . A la famille $\mathcal{F}^*$ on associe un élément

$$\{\varphi^*\} : \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* \exp(-s\lambda_n) \quad ,$$

de la même manière que $\{\varphi\}$ a été associé à $\mathcal{F}$. Il est trivial qu'alors $\{\varphi^*\} = \{\psi\}$.

Proposition II.2.

Pour toute famille Φ d'éléments $\{f\}$ satisfaisant à la condition (a) et, en outre, à la condition,

$$\exists \theta \in [0,\pi/2[: |\mathrm{Arg}\ a_n(f)| \leq \theta \quad , \quad \forall n \in N_+ \text{ et } \forall f \in \mathcal{F} \ ,$$

on a :

$$\sigma_R^{\mathcal{F}} = \sigma_s^{\mathcal{F}} = \sigma^{\mathcal{F}} = \sigma_*^{\mathcal{F}} \ .$$

Il est trivial que,

$$\forall p \in \mathfrak{N} \text{ et } \forall f \in \mathcal{F} : \sum_{n[P]}^{n(P+1)} |a_n(f)| \geq \left| \sum_{n[P]}^{n(P+1)} a_n(f) \right| \geq \cos\theta \sum_{n[P]}^{n(P+1)} |a_n(f)| \quad ,$$

d'où

$$\sum_{n[P]}^{n(P+1)} c_n^* \geq \sum_{n[P]}^{n(P+1)} c_n \geq \cos\theta \sum_{n[P]}^{n(P+1)} c_n^* \quad , \text{ avec } \forall n \in N_+ : c_n^* = c'_n \quad ,$$

et donc,

$$\sigma^{\mathcal{F}*} \geq \sigma^{\mathcal{F}} \geq \sigma^{\mathcal{F}*} \Rightarrow \sigma^{\mathcal{F}} = \sigma_*^{\mathcal{F}} \ .$$

De même $\forall \sigma > \sigma_c^{f^*} = \sigma_A^f$ on a ,

$$f^*(\sigma) \geq |f(\sigma)| \geq f^*(\sigma).\cos\theta \ .$$

Donc si $\mathcal{F}^*$ n'est pas bornée au voisinage d'un point réel σ_o , $\mathcal{F}$ ne l'est pas non plus. Eu égard à la proposition (II.1) le point $\sigma_*^{\mathcal{F}}$ est irrégulier pour la famille $\mathcal{F}^*$; il l'est donc aussi pour la famille $\mathcal{F}$. Ainsi on a :
$\sigma_R^{\mathcal{F}} = \sigma_s^{\mathcal{F}} = \sigma^{\mathcal{F}} = \sigma_*^{\mathcal{F}}$.

Proposition II.3.

$(\{f_p\})$, $p \in N$, étant une suite d'éléments extraits de la famille Φ et satisfaisant aux conditions suivantes :

1) $L < +\infty$

2) $+\infty > \sup \sigma_c^{f_p}$, $p \in N$

3) $\exists \sigma_o \in]L+\sup \sigma_c^{f_p}, +\infty[$: (f_p) *converge uniformément sur le demi-plan* $P_{\sigma_o} = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \geq \sigma_o\}$ *vers une application* F , *de support* P_{σ_o} , *holomorphe sur* $P^o_{\sigma_o}$,

alors on a :

1) $\forall n \in N_+$, $\exists a_n^o \in \mathbb{R} : \lim a_n(f_p) = a_n^o$, $p \uparrow \infty$,

2) $P^o_{\sigma_o+L} = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \sigma_o+L\}$ *est contenu dans l'ouvert maximal de convergence de l'élément* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^o \exp(-s\lambda_n)$ *et le doublet* $\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^o \exp(-s\lambda_n); P^o_{\sigma_o+L}\}$ *est un germe de* F .

Chaque application f_p est bornée sur P_{σ_o} ; en outre, la suite (f_p) est bornée sur P_{σ_o} . On a ,

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^* \text{ , } \forall p \in N \text{ et } \forall s \in P_{\sigma_o} : |f_p(s)| \leq M \text{ ,}$$

et donc,

$$\forall n \in N_+ \text{ et } \forall p \in N : |a_n(f_p)| \exp(-\sigma_o \lambda_n) \leq M \text{ .}$$

On a aussi,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ , } \exists p_\varepsilon \in N : |f_p(s)-f_q(s)| < \varepsilon \text{ , } \forall p \geq p_\varepsilon \text{ , } \forall q \geq p_\varepsilon \text{ et } s \in P_{\sigma_o}$$

et donc,

$$\forall n \in N_+ \text{ , } \forall p \text{ et } \forall q \geq p_\varepsilon : |a_n(f_p)-a_n(f_q)| \exp(-\sigma_o \lambda_n) < \varepsilon \text{ .}$$

La suite $(a_n(f_p))$, $p \in N$, converge pour chaque valeur n sur N_+ . On a,

$$\forall n \in N_+ \text{ , } \exists a_n^o \in \mathbb{R} : \lim a_n(f_p) = a_n^o \text{ , } p \uparrow \infty \text{ ,}$$

et

$$\forall s \in P_{\sigma_o} \text{ et } \forall n \in N_+ : |a_n^o| \exp(-\sigma\lambda_n) \leq M \exp[-(\sigma-\sigma_o)\lambda_n] \text{ .}$$

L'ouvert $P^o_{\sigma_o+L}$ est l'ouvert maximal de convergence de l'élément

$\sum_{n=1}^{\infty} \exp[-(s-\sigma_o)\lambda_n]$. L'ouvert maximal de convergence de l'élément $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^o \exp(-s\lambda_n)$ contient l'ouvert $P^o_{\sigma_o+L}$. On montre facilement que le doublet $\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^o \exp(-s\lambda_n); P^o_{\sigma_o+L}\}$ est un germe de F .

Proposition II.4.

Si $\sigma_*^{\mathcal{F}} < +\infty$ on a $\sigma_*^{\mathcal{F}} - \sigma_s^{\mathcal{F}} \leq L$.

La proposition est triviale si $L = +\infty$. Soit L fini. On suppose $\sigma_*^{\mathcal{F}} - \sigma_s^{\mathcal{F}} > L$ et on considère deux nombres σ_o et σ_1 satisfaisant à la condition :

$$\sigma_s^{\mathcal{F}} < \sigma_1 \leq \sigma_1 + L < \sigma_o < \sigma_*^{\mathcal{F}} .$$

Soit une constante $\varepsilon \in]0, \sigma_*^{\mathcal{F}} - \sigma_o[$. A ce nombre ε , on peut associer une suite infinie strictement croissante (P_j) , d'entiers extraits de $\mathfrak{N}$ telle que

$$\sigma_*^{\mathcal{F}} - \varepsilon < \log[\sup_{f\in\mathcal{F}} \sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f)|]^{1/\lambda_{n[P_j]}} .$$

Soit $\varepsilon' \in]0, \exp(\sigma_*^{\mathcal{F}} - \varepsilon) - \exp(\sigma_o)[$. On peut associer à ce nombre ε' une suite d'applications extraites de $\mathcal{F}$, (f_j) , telle que :

$$[\sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f_j)|]^{1/\lambda_{n[P_j]}} > [\sup_{f\in\mathcal{F}} \sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f)|]^{1/\lambda_{n[P_j]}} - \varepsilon' ,$$

et donc,

$$\exp(-\sigma_o)[\sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f_j)|]^{1/\lambda_{n[P_j]}} > \exp(\sigma_*^{\mathcal{F}} - \sigma_o - \varepsilon) - \varepsilon' \exp(-\sigma_o) > 1$$

$$\lim[\sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f_j)|] \exp(-\sigma_o\lambda_{n[P_j]}) = +\infty \quad , j \uparrow \infty .$$

Si $\sigma_o > 0$, on a :

$$n \in \{n[P_j], \ldots, n(P_j+1)\} : \sigma_o\lambda_{n[P_j]} \leq \sigma_o\lambda_n < \sigma_o\lambda_{n[P_j]} + \sigma_o$$

et donc,

$$\lim \sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f_j)| \exp(-\sigma_o \lambda_n) = +\infty \quad , \quad j \uparrow \infty \quad .$$

Si $\sigma_o \leq 0$, on a,

$$[\sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f_j)] \exp(-\sigma_o \lambda_{n[P_j]}) \leq \sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f_j)| \exp(-\sigma_o \lambda_n)$$

et donc

$$\lim \sum_{n[P_j]}^{n(P_j+1)} |a_n(f_j)| \exp(-\sigma_o \lambda_n) = +\infty \quad , \quad j \uparrow \infty \quad .$$

Si la suite (f_j) ne comporte qu'un nombre fini de termes "distincts", alors il existe un entier j_o et une sous-suite infinie (P_{j_r}) de (P_j) telle que

$$\lim \sum_{n[P_{j_r}]}^{n(P_{j_r}+1)} |a_n(f_{j_o})| \exp(-\sigma_o \lambda_n) = +\infty \quad , \quad j_r \uparrow \infty \quad .$$

On considère alors l'élément dirichlétien

$$\{f_{j_o}\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f_{j_o}) \exp(-s\lambda_n) \quad .$$

Puisque $\sigma_o > \sigma_1 + L > \sigma_s^{\mathcal{F}}$ on a $\sigma_o > \sigma_c^{f_{j_o}} + L \geq \sigma_A^{f_{j_o}}$, et donc,

$$\lim \sum_{n[P_{j_r}]}^{n(P_{j_r}+1)} |a_n(f_j)| \exp(-\sigma_o \lambda_n) = 0 \quad .$$

La contradiction implique $\sigma_*^{\mathcal{F}} - \sigma_s^{\mathcal{F}} \leq L$.

Si la suite (f_j) comporte une infinité d'applications distinctes, alors on peut extraire une sous-suite infinie (f_{j_k}) uniformément convergente sur $P_{\sigma_1} = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \geq \sigma_1\}$ vers une application F , holomorphe sur $\overset{\circ}{P}_{\sigma_1}$. Raisonnant comme dans la démonstration de la proposition (II.3), on a,

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists j_\varepsilon \in N \ , \ \forall j_k \text{ et } \forall j_{k'} > j_\varepsilon \text{ et } \forall s \in P_{\sigma_1} : |f_{j_k}(s) - f_{j_{k'}}(s)| \leq \varepsilon \quad ,$$

et donc,

$$\forall n \in N_+ : |a_n(f_{j_k}) - a_n(f_{j_{k'}})| \leq \varepsilon \exp(\sigma_1 \lambda_n)$$

qui implique :

$$|a_n(f_{j_k}) - a_n^o| \leq \varepsilon \exp(\sigma_1 \lambda_n) \quad , \quad \text{avec} \quad \lim a_n(f_{j_k}) = a_n^o \ , \ j_k \uparrow \infty \quad ,$$

où

$$\{F\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^o \exp(-s\lambda_n) \quad \text{admet} \quad \sigma_A^F \leq \sigma_1 + L \ ,$$

et donc

$$|a_n(f_{j_k})| \exp(-\sigma_o \lambda_n) \leq |a_n^o| \exp(-\sigma_o \lambda_n) + \varepsilon \exp[-(\sigma_o - \sigma_1)\lambda_n]$$

$$\sum_{n[P_{j_r}]}^{n(P_{j_r}+1)} |a_n(f_{j_k})| \exp(-\sigma_o \lambda_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^o| \exp(-\sigma_o \lambda_n) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-(\sigma_o - \sigma_1)\lambda_n] < +\infty \ .$$

La contradiction implique $\sigma_*^{\mathcal{F}} - \sigma_s^{\mathcal{F}} \leq L$.

A l'aide d'un raisonnement analogue à celui-ci-dessus, on prouve :

Proposition II.5.

Si $\sigma_c^\theta < +\infty$ et si $L = 0$, on a $\sigma_c^\theta = \sigma_s^{\mathcal{F}}$.

Proposition II.5 bis.

Si $\sigma_c^\theta < +\infty$ et si la D-suite (λ_n) est à densité maximale $\mathcal{D}$ finie alors $\sigma_c^\theta = \sigma_s^{\mathcal{F}}$.

Cette proposition est un corollaire de la précédente ; en effet, on sait que $\mathcal{D}$ est l'infimum des densités des D-suites mesurables contenant la D-suite (λ_n) comme sous-suite. Soit $\varepsilon > 0$; on peut trouver une D-suite mesurable -que l'on désigne par (μ_n)- contenant (λ_n) comme sous-suite et de densité strictement inférieure à $\mathcal{D}+\varepsilon$. Il est évident que :

$$\forall n \in N_+ : \mu_n \leq \lambda_n \quad \text{et que} \quad \lim\{\log n/\mu_n\} = 0 \ , \ n \uparrow \infty \ ,$$

et donc,

$$L = 0 \ .$$

Proposition II.6.

Sous les conditions :

1) la D-suite (λ_n) est mesurable à densité D (finie)
2) $\sigma_c^{\theta} < +\infty$
3) $\sigma_R^{\mathcal{F}} < 0$

alors $\exists \alpha \in]0,\pi/2[$ et $\ell \in]0,|\sigma_R^{\mathcal{F}}|/\text{tg } \alpha[$ tels qu'à chaque $f \in \mathcal{F}$ on peut associer une application -que l'on note φ_f - de

$$S_\alpha = \{s \in \mathbb{C} \mid |\text{Arg } s| < \alpha\}$$

dans $\mathbb{C}$, satisfaisant aux conditions suivantes

1) φ_f est holomorphe sur S_α
2) $\forall \epsilon > 0$, $\exists r_\epsilon > 0 : |\varphi_f(z)| < \exp\{[(\pi D - \ell)|\sin \psi| + \epsilon]|z|\}$, $\forall z \in \{S_\alpha \mid |z| > r_\epsilon\}$, avec $z = |z| \exp(i\psi)$, (r_ϵ est le même pour chaque $f \in \mathcal{F}$) .
3) $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $\forall f \in \mathcal{F} : \varphi_f(\lambda_n) = a_n(f)\mathbb{C}'(\lambda_n)$. ($\mathbb{C}'(\lambda_n)$ désignant la valeur en λ_n de la dérivée de l'application entière

$$z \longrightarrow \mathbb{C}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^2/\lambda_n^2) \quad .$$

Cette proposition résulte immédiatement d'un résultat classique et d'une remarque dûs à V. Bernstein ([1] p. 103 et p. 115). En effet, on a $\sigma^{*\mathcal{F}} \leq \sigma_c^{\theta}$ (les al-germes-D , $\{f\}$, ont tous une abscisse de convergence finie au plus égale à $\sigma_c^{\theta} < +\infty$) . La famille $\mathcal{F}$ est bornée sur chaque demi-plan $P_{\sigma_o} = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \geq \sigma_o\}$, indexé par $\sigma_o > \sigma_s^{\mathcal{F}}$. $\mathcal{F}$ est régulière sur $P_o^o = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > 0\}$ et bornée sur le secteur $S_\theta = \{s \in \mathbb{C} \mid |\text{Arg } s| \leq \theta\}$ indexé par θ sur $[0,\pi/2[$. Puisque $\sigma_R^{\mathcal{F}} < 0$, on peut trouver un triangle compact $\mathcal{T}$ (de sommets $i\ell$, $-i\ell$, $-\ell \text{ tg } \alpha$, avec $\ell \in]0,|\sigma_R^{\mathcal{F}}|/\text{tg } \alpha[$ et $\alpha \in]0,\pi/2[$) sur lequel tous les f sont holomorphes et $\mathcal{F}$ est bornée. Il suffit dès lors d'appliquer le résultat de V. Bernstein ([1] th.III, p. 103) à chacune des applications de $\mathcal{F}$, compte tenu d'une remarque justifiant l'assertion (2) ([1] p.115).

Proposition II.7.

Sous les conditions :

1) la D-suite (λ_n) est mesurable à densité D (finie) ,

2) $\sigma_c^{\theta} < +\infty$,

alors $\sigma_s^{\mathcal{F}} - \sigma_R^{\mathcal{F}} \leq \delta$ (où δ est l'indice de condensation, au sens de V. Bernstein, de la D-suite (λ_n)) .

La condition (1) implique $L = 0$, et (2) implique $\sigma_R^{\mathcal{F}} < +\infty$. On considère un nombre $h > \sigma_R^{\mathcal{F}}$ et la famille -que l'on désigne par Φ_h- des éléments (indexés par f sur $\mathcal{F}$)

$$\{f_h\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \exp[-(s+h)\lambda_n] .$$

La famille $\mathcal{F}_h$ -définie à partir de Φ_h comme $\mathcal{F}$ a été définie à partir de Φ- a une abscisse de suprarégularité $\sigma_s^{\mathcal{F}_h} = \sigma_s^{\mathcal{F}} - h$ et une abscisse de régularité $\sigma_R^{\mathcal{F}_h} < 0$. Eu égard à la proposition (II.6), il existe une famille d'applications φ_h satisfaisant aux conditions suivantes :

1) $\forall \varepsilon > 0 , \exists r_\varepsilon > 0 , \forall r > r_\varepsilon : |\varphi_h(r)| < \exp(\varepsilon r)$

(r_ε est le même pour chaque $f_h \in \mathcal{F}_h$; la condition ci-dessus moins fine que son analogue dans l'assertion (1) de la proposition (II.6) suffit cependant pour ce qui suit)

2) $\forall n \in N_+ : \varphi_h(\lambda_n) = a_n(f) \exp(-h\lambda_n) C'(\lambda_n)$.

Il est trivial que $\sigma_s^{\mathcal{F}} \leq \sigma_c^{\theta}$, et donc,

$$\sigma_s^{\mathcal{F}} \leq \limsup_{n\uparrow\infty} \{\log[\{\sup_{f\in\mathcal{F}} |\varphi_h(\lambda_n)|\}/C'(\lambda_n)]/\lambda_n\} + h$$

$$\sigma_s^{\mathcal{F}} \leq \limsup_{n\uparrow\infty} \{\log[1/C'(\lambda_n)]/\lambda_n\} + \varepsilon + h .$$

On sait que si la D-suite (λ_n) est mesurable à densité finie alors son indice de condensation (au sens de V. Bernstein) δ peut s'exprimer sous la forme :

$$\delta = \limsup\{\log[1/C'(\lambda_n)]/\lambda_n\} , n \uparrow \infty ,$$

on a donc :

$$\sigma_s^{\mathcal{F}} \leq \delta + h \Rightarrow \sigma_s^{\mathcal{F}} - \sigma_R^{\mathcal{F}} \leq \delta ,$$

CHAPITRE III

Soit $\mathcal{A}$ une famille d'al-germes tayloriens centrés en s_o ,

$$\{f\} = \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_p(f)(s-s_o)^p \quad ,$$

satisfaisant à la condition suivante (du type Mandelbrojt),

$$\forall p \in N : \sup|\gamma_p(f)| < +\infty \quad , \quad \{f\} \in \mathcal{A} \ .$$

On désigne par f l'application $s \longrightarrow \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_p(f)(s-s_o)^p$ dont le support est l'ouvert maximal de convergence de $\{f\}$.

Soit $\mathcal{F}$ la famille des applications f , ainsi associée à $\mathcal{A}$. On désigne par (p_i) $i \in N_+$, la sous-suite des entiers satisfaisant à la condition, $\sup|\gamma_{p_i}(f)| \neq 0$, $\{f\} \in \mathcal{A}$, et on pose,

$$\forall i \in N_+ : (p_i)! \, . \sup|\gamma_{p_i}(f)| = K_i \ .$$

Se donnant une D-suite strictement positive (μ_n) , $n \in N_+$, on considère la famille des ensembles $\mathcal{E}_{i,n}$ de $\mathbb{R}$, indexés par le couple ordonné (i,n) :

$$\mathcal{E}_{i,n} = \{x \in \mathbb{R} | K_i > \exp[-x\mu_n + p_i\mu_n^*]\} \quad , \quad \text{avec} \quad \mu_n^* = \text{Log}\ \mu_n \ .$$

Il est trivial que l'ensemble $\mathcal{E}_{i,n}$ est non vide et est un sous-ensemble strict de $\mathbb{R}$. Désignant par $x_{i,n}$ son infimum, on a :

$$K_i = \exp[-x_{i,n}\mu_n + p_i\mu_n^*]$$

ou encore : $x_{i,n} = (p_i\mu_n^* - K_i^*)/\mu_n$ avec $K_i^* = \log K_i$.

Je me propose d'utiliser la matrice $\|x_{i,n}\|$ pour mettre en évidence l'existence d'un majorant intéressant du rayon de régularité de la famille $\mathcal{F}$ au point s_o , et dans certains cas pour donner une autre expression de ce même rayon de régularité. Les hypothèses restrictives portent, soit sur la suite (p_i) , soit sur la suite (μ_n) .

Dans une deuxième partie, j'utilise ces résultats pour retrouver certaines propriétés du chapitre II. Pour éviter des écritures trop lourdes, on désignera dans ce chapitre, le logarithme népérien d'un nombre positif r par r^* , comme on l'a déjà fait plus haut pour μ_n et K_i .

I - On considère la famille des applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, indexées par $i \in N_+$,

$$x_i : \mu \longrightarrow x_i(\mu) = (p_i\mu^* - K^*)/\mu \quad .$$

Proposition III.1.

X_i désignant le maximum des valeurs prises par l'application x_i sur son support, le rayon de régularité de $\mathcal{F}$ en s_o est donné par :

$$\mathcal{R}_{s_o}^{\mathcal{F}} = \lim \inf X_i \ , \ i \uparrow \infty \ .$$

En effet $dx_i/d\mu = (p_i - p_i\mu^* + K_i^*)/\mu^2$ et $X_i = p_i/\mu^i$ avec $\mu^i = e.[K_i]^{1/p_i}$.

On sait par ailleurs, d'après un algorithme de Mandelbrojt [3] que $\mathcal{R}_{s_o}^{\mathcal{F}} = \lim \inf [(p_i)!/K_i]^{1/p_i}$, $i \uparrow \infty$. D'autre part, $\lim\{[(p_i)!]^{1/p_i}.e/p_i\} = 1$, $p_i \uparrow \infty$. On en déduit le résultat annoncé.

Dans ce qui suit on se donne une D-suite strictement positive (μ_n) , $n \in N_+$, et on considère la matrice $\|x_{i,n}\|$ introduite antérieurement (et où $x_{i,n} = x_i(\mu_n)$) .

Proposition III.2.

Si $\lim(\mu_{n+1}/\mu_n) = 1$, $n \uparrow \infty$, alors on a :

$$\mathcal{R}_{s_o}^{\mathcal{F}} = \lim \inf\{\sup x_{i,n}, \ n \in N_+\} \ , \ i \uparrow \infty \ .$$

On pose :

$$\beta = \lim\ \inf\{\sup\ x_{i,n},\ n\in N_+\}\ ,\ i\uparrow\infty\ .$$

Il est trivial que $\forall i \in N_+ : \{\sup\ x_{i,n}\ ,\ n\in N_+\} > 0$; par suite, $\beta \in [0,+\infty]$.

■ On suppose d'abord $\beta \in]0,+\infty[$. $\varepsilon > 0$ étant donné, on peut trouver une sous-suite infinie J de N_+ telle que,

$$\forall j \in J : \{\sup\ x_{j,n}\ ,\ n\in N_+\} < \beta+\varepsilon\ .$$

A chaque entier de la suite (p_j) , vérifiant la condition $p_j > \beta\mu_1$, on associe le nombre suivant :

$$\mu_{n_j} = \mathrm{Max}\{\mu_n | \mu_n \le p_j/\beta\}\ .$$

Eu égard à $X_j = p_j/[e(K_j)^{1/p_j}]$ ou $K_j^* = p_j[p_j^*-1-X_j^*]$ on a,

$$x_{j,n_j} = p_j[\mu^*_{n_j} - p_j^* + X_j^* + 1]/\mu_{n_j} < \beta+\varepsilon\ ;$$

par suite $X_j^* < \mu_{n_j}(\beta+\varepsilon)/p_j - \mu^*_{n_j} + p_j^* - 1$.

Le choix de μ_{n_j} et la condition $\lim(\mu_{n+1}/\mu_n) = 1$, $n\uparrow\infty$ entraîne :

$$\lim(\mu_{n_j}\beta/p_j) = 1\ ,\quad \lim(\mu_{n_j}/p_j) = 1/\beta\ ,\quad \lim(p_j^*-\mu^*_{n_j}) = \beta^*\ ,\ p_j\uparrow\infty\ .$$

Par conséquent,

$$\varepsilon/\beta + \beta^* \ge \lim\ \inf\{X_j^*\ ,\ J\ni j\uparrow\infty\}$$

et

$$\mathcal{R}^{\mathcal{F}}_{s_o} = \lim\ \inf\{X_i\ ,\ i\uparrow\infty\} \le \lim\ \inf\ \{X_j\ ,\ J\ni j\uparrow\infty\} \le \beta\ \exp(\varepsilon/\beta)\ .$$

ε étant strictement positif arbitraire il en résulte que

$$\mathcal{R}^{\mathcal{F}}_{s_o} \le \beta\ .$$

D'autre part, il est trivial que :

$$\mathcal{R}^{\mathcal{F}}_{s_o} = \lim\ \inf\{X_i\ ,\ i\uparrow\infty\} \ge \lim\ \inf\{[\sup\ x_{i,n}\ ,\ n\in N_+]\ ,\ i\uparrow\infty\} = \beta\ .$$

En résumé : $\mathcal{R}^{\mathcal{F}}_{s_o} = \beta$ si $\beta \in]0,+\infty[$.

■ Si $\beta = +\infty$, alors $\lim\ X_i = +\infty$, $i\uparrow\infty$, et donc $\mathcal{R}^{\mathcal{F}}_{s_o} = +\infty$.

■ Si $\beta = 0$, le même calcul que précédemment montre qu'en posant $\mu_{n_j} = \sup\{\mu_n | \mu_n \leq p_j/\epsilon\}$ pour $\forall p_j$ vérifiant la condition $p_j > \epsilon\mu_1$, on a $\mathcal{R}^{\mathcal{F}}_{s_o} \leq \epsilon$ quel que soit ϵ strictement positif ; donc $\mathcal{R}^{\mathcal{F}}_{s_o} = 0$.

Remarque.-

Quel que soit l'entier positif n_o ; la suite (ν_n) , $n \in N_+$, définie par la relation :

$$\forall n \in N_+ : \nu_n = \mu_{n+n_o} ,$$

vérifier l'hypothèse de la proposition III.2 . Par conséquent :

$$\forall n_o \in N_+ : \mathcal{R}^{\mathcal{F}}_{s_o} = \lim\ \inf\{\sup\ x_{i,n} , n > n_o\} , i \uparrow \infty .$$

Proposition III.3.

Posant :

$$\alpha_{n_o} = \sup\ x_{i,n} , i \geq n_o , n \geq n_o ,$$

$$\beta_1 = \lim\ \alpha_{n_o} , n_o \uparrow \infty ,$$

si $\lim(p_{i+1})/p_i = 1$, $i \uparrow \infty$, alors on a

$$\mathcal{R}^{\mathcal{F}}_{s_o} \leq \beta_1 .$$

Il est trivial que $\alpha_{n_o} \in]0,+\infty]$ et est une fonction décroissante de n_o . La suite (α_{n_o}) , $n_o \in N_+$ a donc une limite que l'on note β_1 . Si $\alpha_{n_o} = +\infty$, $\forall n_o \in N_+$, on pose alors $\beta_1 = +\infty$. Par suite $\beta_1 \in [0,+\infty]$.

■ On suppose d'abord $\beta_1 \in]0,+\infty[$. $\epsilon > 0$ étant donné, on peut trouver un entier n_o tel que, $\forall n \geq n_o$, $\alpha_n < \beta_1 + \epsilon$, et par conséquent :

$$\forall i \geq n_o , \forall n \geq n_o , x_{i,n} < \beta_1 + \epsilon .$$

Pour tout n vérifiant les deux conditions $\beta_1 \mu_n > p_{n_o}$ et $n \geq n_o$, on pose

$$p_{i_n} = \text{Max}\{p_i | p_i \leq \beta_1 \mu_n\} .$$

Dans ces conditions, on a :

$$x_{i_n,n} = p_{i_n}[\mu_n^* - p_{i_n}^* + X_{i_n}^* + 1]/\mu_n < \beta_1 + \varepsilon$$

et

$$X_{i_n}^* < \mu_n(\beta_1+\varepsilon)/p_{i_n} - \mu_n^* + p_{i_n}^* - 1 \quad .$$

Le choix de p_{i_n} et la condition $\lim(p_{i+1}/p_i) = 1$, $i\uparrow\infty$, entraîne :

$$\lim(\mu_n\beta_1/p_{i_n}) = 1 \ , \quad \lim(\mu_n/p_{i_n}) = 1/\beta_1 \ , \quad \lim(p_{i_n}^* - \mu_n^*) = \beta_1^* \ , \quad n\uparrow\infty \ .$$

Par conséquent, on a $\lim\inf\{X_{i_n}^* , n\uparrow\infty\} \le \varepsilon/\beta_1 + \beta_1^*$, et

$$\mathcal{R}_{s_o}^{\mathcal{F}} = \lim\inf\{X_i \ , \ i\uparrow\infty\} \le \lim\inf\{X_{i_n} \ , \ n\uparrow\infty\} \le \beta_1.\exp(\varepsilon/\beta_1) \quad .$$

ε étant strictement positif arbitraire, on a donc $\mathcal{R}_{s_o}^{\mathcal{F}} \le \beta_1$.

- Si $\beta_1 = +\infty$, le résultat annoncé est trivialement exact.

- Si $\beta_1 = 0$, le même calcul que précédemment montre qu'en posant $p_{i_n} = \sup\{p_i | p_i \le \varepsilon\mu_n\}$ pour tout n vérifiant les deux conditions, $\varepsilon\mu_n > p_{n_o}$ et $n \ge n_o$, alors on a $\mathcal{R}_{s_o}^{\mathcal{F}} \le \varepsilon$ quel que soit $\varepsilon > 0$. Par suite on a $\mathcal{R}_{s_o}^{\mathcal{F}} = 0$.

Les deux propositions suivantes sont des formes un peu plus générales des propositions III.2 et III.3, et cependant plus pratiques pour les applications considérées dans le paragraphe II. La famille $\mathcal{F}$, les ensembles $\mathcal{E}_{i,n}$ et les nombres $x_{i,n}$ et α_{n_o} étant définis comme précédemment, on considère en outre une suite strictement positive (b_n) , $n\in N_+$ satisfaisant à la condition

$$\lim(b_n^*/\mu_n) = 0 \ , \quad n\uparrow\infty \ .$$

On considère alors la famille des ensembles $\mathcal{E}'_{i,n}$ de $\mathbb{R}$ indexés par le couple ordonné (i,n) :

$$\mathcal{E}'_{i,n} = \{x'\in\mathbb{R} | K_i > b_n.\exp[-x'\mu_n + p_i\mu_n^*]\} \ .$$

On pose $x'_{i,n} = \mathrm{Inf}\ \mathcal{E}'_{i,n}$ et l'on a $K_i = b_n.\exp[-x'_{i,n}\mu_n + p_i\mu_n^*]$.

Proposition III.4.

Sous la condition $\lim(\mu_{n+1}/\mu_n) = 1$, $n\uparrow\infty$, on a

$$\Re^{\mathcal{F}}_{s_o} = \lim\{\lim\inf[\sup x'_{i,n} , n \geq n_o] , i\uparrow\infty\} , n_o \uparrow \infty .$$

Il est trivial que

$$K_i = \exp[-(x'_{i,n} - b^*_n/\mu_n)\mu_n + p_i\mu^*_n] ,$$

et par conséquent,

$$x_{i,n} = x'_{i,n} - b^*_n/\mu_n .$$

Posant

$$M_{n_o} = \text{Max}|b^*_n/\mu_n| , n \geq n_o ,$$

on a ,

$$\forall i \in N_+ : |\sup x_{i,n} - \sup x'_{i,n}| \leq M_{n_o}, n \geq n_o .$$

La condition $\lim(b^*_n/\mu_n) = 0$, $n \uparrow \infty$ implique $\lim(M_{n_o}) = 0$, $n_o\uparrow\infty$.

Par conséquent, on a,

$$\{\lim\inf[\sup x_{i,n}, n\geq n_o] , i\uparrow\infty\} - \{\lim\inf[\sup x'_{i,n}, n\geq n_o] , i\uparrow\infty\} \to 0 , n_o\uparrow\infty .$$

La proposition III.2 implique alors la proposition III.4.

Proposition III.5.

Posant

$$\alpha'_{n_o} = \sup x'_{i,n} , i\geq n_o , n\geq n_o ,$$

$$\beta'_1 = \lim \alpha'_{n_o} , n_o\uparrow\infty ,$$

si

$$\lim(p_{i+1}/p_i) = 1 , i\uparrow\infty ,$$

alors on a,

$$\beta'_1 = \beta_1 \geq \Re^{\mathcal{F}}_{s_o} .$$

En effet, comme pour la proposition précédente, on a trivialement $|\alpha_{n_o} - \alpha'_{n_o}| \leq M_{n_o}$. La proposition III.3 implique alors la proposition III.5.

Définition III.6.

On convient de dire que le disque ouvert dans $\mathbb{C}$, de centre s_o et de rayon β_1 (ou β'_1) est le "sur-disque de régularité de la famille $\mathcal{F}$ au point s_o ".

II. La suite (λ_n) , $n \in N_+$, étant une D-suite, on considère la famille Φ des al-germes dirichlétiens,

$$\{f\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\exp(-s\lambda_n) \quad \text{où} \quad s = \sigma+i\tau \ , \ \sigma \text{ et } \tau \in \mathbb{R} \ ,$$

satisfaisant à la condition suivante :

$$\forall n \in N_+ : \sup|a_n(f)| < +\infty \quad , \ \{f\} \in \Phi \ .$$

On désigne par f la restriction, à l'étoile rectiligne de Riesz de $\{f\}$, de la fonction analytique définie à l'aide de $\{f\}$, restriction qui prend en chaque point de l'ouvert maximal de convergence de $\{f\}$, la valeur que prend en ce point l'application

$$s \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\ \exp(-s\lambda_n).$$

$f(s)$ désigne alors la valeur prise par l'application f en s , et on note $\mathcal{F}$ la famille des applications f , ainsi associée à Φ .

Pour chaque application f de $\mathcal{F}$, on désigne par H_B^f l'ensemble des nombres réels h , pour lesquels f est bornée sur le demi-plan $\{s\in\mathbb{C}|\sigma\geq h\}$, et par σ_B^f l'infimum de H_B^f . De même $H_B^{\mathcal{F}}$ désignant l'ensemble des nombres réels h pour lesquels $\mathcal{F}$ est bornée sur le demi-plan $\{s\in\mathbb{C}|\sigma\geq h\}$, on note $\sigma_B^{\mathcal{F}} = \text{Inf } H_B^{\mathcal{F}}$. On convient, comme il est usuel que : $\sigma_B^{\mathcal{F}}$ (resp σ_B^f) $= -\infty$ si $H_B^{\mathcal{F}}$ (resp H_B^f) $= \mathbb{R}$, et $\sigma_B^{\mathcal{F}}$ (resp σ_B^f) $= +\infty$, si $H_B^{\mathcal{F}}$ (resp H_B^f) est vide.

Proposition III.7.

Sous les conditions : $\forall f \in \mathcal{F}$, $\forall n \in N_+$, $a_n(f) \in \mathbb{R}$, et $\sigma^{\mathcal{F}} = 0$ alors le point $s = 0$ est un point irrégulier pour $\mathcal{F}$ et $\sigma_R^{\mathcal{F}} = \sigma^{\mathcal{F}} = 0$.

$\sigma^{\mathcal{F}} = 0$ implique $\sigma_c^f \leq 0$, $\forall f \in \mathcal{F}$. $s_o \in \mathbb{R}_+^*$, on désigne par $\{f^*_{s_o}\}$ l'al-germe dirichlétien associé à f :

$$\{f^*_{s_o}\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\ \exp(-s_o\lambda_n - s\lambda_n^*) \ .$$

L'hypothèse $\sigma_c^f \leq 0$ implique $\sigma_c^{f^*_{s_o}} = -\infty$, $\forall f \in \mathcal{F}$. On note $f^*_{s_o}$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

$$s \longrightarrow f^*_{s_o}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\ \exp(-s_o\lambda_n - s\lambda_n^*) \ .$$

L'élément taylorien

$$\{f_{s_o}\} : \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (s-s_o)^p f^*_{s_o}(-p)/p!$$

représente alors le seul al-germe taylorien de f au point s_o .

Désignons par (q_j) , $j \in N$, la sous-suite des entiers positifs vérifiant les deux conditions :

$$n[q_j] \leq n(q_j+1)$$

$$\lim\Big(\sum_{n[q_1]}^{n(q_j+1)} C_n \Big)^{1/\lambda_{n[q_j]}} = 1 \ , \quad j \uparrow \infty \ .$$

$\forall p \in N_+$, $\forall j \in N$ et $\forall f \in \mathcal{F}$, on a ,

$$|f^*_{s_o}(-p)| \geq \sum_{n[q_1]}^{n(q_j+1)} a_n(f) \exp[-s_o\lambda_n + p\lambda^*_n]$$

$$\geq \Big[\sum_{n[q_1]}^{n(q_j+1)} a_n(f)\Big] \exp(-s_o\lambda_{n(q_j+1)} + p\lambda^*_{n[q_j]})$$

$$\geq \Big[\sum_{n[q_j]}^{n(q_j+1)} a_n(f)\Big] \exp(-s_o).\exp(-s_o\lambda_{n[q_j]} + p\lambda^*_{n[q_j]}) \ .$$

Par conséquent :

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} |f^*_{s_o}(-p)| \geq \Big[\sum_{n[q_j]}^{n(q_j+1)} C_n\Big] \exp(-s_o).\exp(-s_o\lambda_{n[q_j]} + p\lambda^*_{n[q_j]}) \ .$$

Posant pour $\forall j \in N$,

$$\mu_j = \lambda_{n[q_j]} \ , \quad \text{et} \quad b_j = \Big[\sum_{n[q_j]}^{n(q_j+1)} C_n\Big] \exp(-s_o) \ ,$$

et utilisant les notations du paragraphe I , on a,

$$x'_{p,j} \leq s_o \ , \quad \forall p \in N_+ \ , \ \forall j \in N \ .$$

Par suite $\alpha'_{n_o} \leq s_o$, $\forall n_o \in N_+$, et $\beta'_1 \leq s_o$. La proposition III.5 entraîne alors $\mathcal{R}^{\mathcal{F}}_{s_o} \leq s_o$.

On sait par ailleurs que $\Re^{\mathcal{F}}_{s_o} \geq s_o$. Il en résulte que $\Re^{\mathcal{F}}_{s_o} = s_o$, et le point $s = 0$ est irrégulier pour $\mathcal{F}$; d'où le résultat annoncé :

$$\sigma^{\mathcal{F}}_R = \sigma^{\mathcal{F}} = 0 \ .$$

Remarque.-

Si $\sigma^{\mathcal{F}} = -\infty$, l'inégalité $\sigma^{\mathcal{F}}_R \leq \sigma^{\mathcal{F}}$ entraîne trivialement $\sigma^{\mathcal{F}}_R = \sigma^{\mathcal{F}} = -\infty$.

Proposition III.8.

Sous les conditions $\exists \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *tel que*

$$|\mathrm{Arg}\ (a_n(f)| \leq \theta \ , \ \forall n \in N_+ \ , \ \forall f \in \mathcal{F} \ ,$$

$$\sigma^{\mathcal{F}} = 0 \ ,$$

alors le point $s = 0$ *est un point irrégulier pour* $\mathcal{F}$ *, et*

$$\sigma^{\mathcal{F}}_R = \sigma^{\mathcal{F}} = 0 \ .$$

$s_o \in \mathbb{R}^*_+$ étant donné, et (q_j) , $j \in N$, désignant une sous-suite des entiers positifs, vérifiant les mêmes conditions que dans la proposition précédente, on a,

$$f^*_{s_o}(-p) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \exp(-s_o\lambda_n + p\lambda^*_n)$$

$$|f^*_{s_o}(-p)| \geq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)| \cos\theta . \exp[-s_o\lambda_n + p\lambda^*_n] \ .$$

Le même calcul que dans la démonstration de la proposition précédente montre que $\forall p \in N_+$, $\forall j \in N$, on a ,

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} |f^*_{s_o}(-p)| \geq \left[\sum_{n[q_j]}^{n(q_j+1)} C_n\right] \exp(-s_o) . \cos\theta . \exp(-s_o\lambda_{n[q_j]} + p\lambda^*_{n[q_j]}) \ .$$

Posant pour $\forall j \in N$,

$$\mu_j = \lambda_{n[q_j]} \ , \text{ et } \ b_j = \sum_{n[q_j]}^{n(q_j+1)} C_n . \cos\theta . \exp(-s_o) \ ,$$

la proposition III.5 implique comme dans la proposition précédente $\Re^{\mathcal{F}}_{s_o} \leq s_o$

et par conséquent $\mathcal{R}^{\mathcal{F}}_{s_o} = s_o$. On en déduit le résultat annoncé.

Remarque.-

Si $\sigma^{\mathcal{F}} = -\infty$ on a encore trivialement $\sigma^{\mathcal{F}}_R = \sigma^{\mathcal{F}} = -\infty$.

La proposition qui suit est valable de quelque manière qu'ait été définie la famille $\mathcal{F}$.

Proposition III.9.

Sous la condition $\sup_{f\in\mathcal{F}} \sigma^f_B < \sigma^{\mathcal{F}}_B < +\infty$, on a :

$$\sigma^{\mathcal{F}}_B \leq \sigma^{\mathcal{F}}_s .$$

Choisissons $\sigma_o \in]\sup \sigma^f_B , \sigma^{\mathcal{F}}_B[$. Toute suite extraite de $\mathcal{F}$, presque uniformément convergente sur le demi-plan $P_o = \{s\in\mathbb{C} \mid \sigma\geq\sigma_o\}$, converge nécessairement vers une fonction holomorphe -car $\mathcal{F}$ est bornée sur tout demi-plan $\{s\in\mathbb{C} \mid \sigma\geq\sigma_1>\sigma^{\mathcal{F}}_B\}$ - bornée sur P_o -car $\sigma_o > \sup \sigma^f_B$ - . Une telle suite est bornée sur P_o . Or on peut extraire de $\mathcal{F}$ une suite telle qu'aucune sous-suite ne soit bornée sur P_o , puisque $\sigma_o < \sigma^{\mathcal{F}}_B$. P_o n'est donc pas un domaine de suprarégularité pour $\mathcal{F}$. Le résultat annoncé s'en déduit.

Soit $\{f\}$ un élément dirichlétien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-s\lambda_n)$ et f la restriction à l'étoile rectiligne de Riesz de $\{f\}$ de la fonction analytique définie à l'aide de $\{f\}$, restriction qui prend en chaque point de l'ouvert maximal de convergence de $\{f\}$ la valeur que prend en ce point l'application $s \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-s\lambda_n)$. A tout nombre réel h et à $\{f\}$ on associe l'élément dirichlétien :

$$\{f_h\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-ih\lambda_n - s\lambda_n) .$$

On désigne par f_h l'application définie à partir de $\{f_h\}$ comme f a été définie à partir de $\{f\}$. Il est trivial qu'en tout point s de l'étoile rectiligne de Riesz de $\{f_h\}$, on a : $f_h(s) = f(s+ih)$.

$\tau_o \in \mathbb{R}$ étant donné, on pose $\mathcal{F}^f_{\tau_o} = \{f_h \mid h \geq \tau_o\}$.

Proposition III.10.

Sous les conditions : $\omega^f = \limsup \{|a_n|^*/\lambda_n\} < +\infty$, $n\uparrow\infty$, et $\sigma_A^f < +\infty$ choisissant $\sigma_o > \sigma_A^f$, on a $\mathcal{R}_{\sigma_o}^{\mathcal{F}^f_{\tau_o}} \leq \sigma_o - \omega^f$.

Si $\omega^f = -\infty$, la proposition est trivialement exact.

Si $\omega^f > -\infty$, on peut supposer $\omega^f = 0$ sans nuire à la généralité du résultat. Posons $\forall p \in N_+ : M^f_{\tau_o,p} = \sup_{h\geq\tau_o} |f_h^{(p)}(\sigma_o)| = \sup_{h\geq\tau_o} |f^{(p)}(\sigma_o+ih)|$

$$f^{(p)}(\sigma_o+ih) = (-1)^p \sum_{K=1}^{\infty} a_K \exp[-(\sigma_o+ih)\lambda_K + p\lambda_K^*]$$

$\forall p \in N_+$, $\forall K \in N_+$, $M^f_{\tau_o,p} \geq |a_K| \exp(-\sigma_o\lambda_K + p\lambda_K^*)$.

La condition $\omega^f = 0$ entraîne qu'on peut trouver une sous-suite croissante $(K_n) \subset N_+$ telle que $\lim \{|a_{K_n}|^*/\lambda_{K_n}\} = 0$, $K_n \uparrow \infty$. Posant : $\forall n \in N_+$, $\mu_n = \lambda_{K_n}$ et $b_n = |a_{K_n}|$ et utilisant les notations du paragraphe I , on a :

$$x'_{p,n} \leq \sigma_o \ , \ \forall p \in N_+ \ , \ \forall n \in N_+ \ .$$

Par suite, $\alpha'_{n_o} \leq \sigma_o$, et $\beta'_1 \leq \sigma_o$. La proposition III.5 entraîne alors $\mathcal{R}_{\sigma_o}^{\mathcal{F}^f_{\tau_o}} \leq \beta'_1 \leq \sigma_o$.

Corollaire III.10.1.

Sous les conditions : $\lim \{(\log n)/\lambda_n\} = 0$, $n \uparrow \infty$, et $\sigma_c^f = 0$, si l'étoile rectiligne de Riesz de $\{f\}$ contient une bande du type $\{s\in\mathbb{C} \mid \tau\geq\tau_o \ , \ a\leq\sigma\leq b\}$ avec $a < 0 < b$, l'image de cette bande par f n'est pas bornée.

Corollaire III.10.2.

Sous les conditions du théorème III.10, on a : $\sigma_B^f \geq \omega^f$. Si de plus $\lim\{(\log n)/\lambda_n\} = 0$ alors on a : $\sigma_B^f = \omega^f$.

C'est une conséquence triviale du théorème III.10 : il suffit

de prendre $\tau_o = -\infty$. Si de plus $\limsup \{(\log n)/\lambda_n\} = 0$, $\sigma_c^f = \sigma_A^f = \omega^f$ et par suite on a $\sigma_B^f \leq \omega^f$.

Considérons de nouveau la famille $\mathcal{F}$ introduite au début de ce paragraphe et la famille $\mathcal{F}_{\tau_o} = \bigcup_f \mathcal{F}^f_{\tau_o}$, $f \in \mathcal{F}$.

Proposition III.11.

Sous les conditions $\omega^{\mathcal{F}} = \limsup (A_n^*/\lambda_n) < +\infty$, $n\uparrow\infty$, *et* $\sigma^\theta < +\infty$, *choisissant* $\sigma_o < \sigma^\theta$, *on a* $\mathcal{R}^{\mathcal{F}_{\tau_o}}_{\sigma_o} \leq \sigma_o - \omega^{\mathcal{F}}$.

Si $\omega^{\mathcal{F}} = -\infty$, la proposition est trivialement exacte. Si $\omega^{\mathcal{F}} > -\infty$, on supposera $\omega^{\mathcal{F}} = 0$ sans nuire à la généralité du résultat.

Posons : $\forall p \in N_+$, $M_{\tau_o,p} = \sup M^f_{\tau_o,p}$, $f \in \mathcal{F}$

$= \sup |f^{(p)}(\sigma_o+ih)|$, $h \geq \tau_o$, $f \in \mathcal{F}$.

$\forall p \in N_+$, $\forall K \in N_+$, $M_{\tau_o,p} \geq A_K \exp(-\sigma_o\lambda_K + p\lambda_K^*)$.

La condition $\omega^{\mathcal{F}} = 0$ entraîne qu'on peut trouver une sous-suite croissante $(K_n) \subset N_+$ telle que $\lim(A^*_{K_n}/\lambda_{K_n}) = 0$, $K_n \uparrow \infty$.

Posant : $\forall n \in N_+$, $\mu_n = \lambda_{K_n}$ et $b_n = A_{K_n}$, on a, comme dans la proposition III.10, $\beta_1' \leq \sigma_o$ et par suite

$$\mathcal{R}^{\mathcal{F}_{\tau_o}}_{\sigma_o} \leq \beta_1' \leq \sigma_o .$$

Si $\lim\{(\log n)/\lambda_n\} = 0$, $n\uparrow\infty$, on a alors $\sigma^{\mathcal{F}} = \sigma^{\mathcal{F}}_* = \sigma^\theta = \omega^{\mathcal{F}}$. On en déduit la proposition :

Corollaire III.11.1.

Sous les conditions $\lim\{(\log n)/\lambda_n\} = 0$, $n\uparrow\infty$ *et* $\sigma^{\mathcal{F}} = 0$, *si le domaine support de* $\mathcal{F}$ *contient une bande du type* $\{s\in\mathbb{C} \mid \tau \geq \tau_o, a \leq \sigma \leq b\}$ *avec* $a < 0 < b$, $\mathcal{F}$ *n'est pas bornée sur cette bande.*

Corollaire III.11.2.

Sous les conditions du théorème III.11, on a, $\sigma_B^{\mathcal{F}} \geq \omega^{\mathcal{F}}$. Si de plus $\lim\{(\log n)/\lambda_n\} = 0$, $n\uparrow\infty$, alors on a $\sigma_B^{\mathcal{F}} = \omega^{\mathcal{F}}$.

Il suffit dans le théorème III.11, de prendre $\tau_o = -\infty$. Si de plus, $\lim\{(\log n)/\lambda_n\} = 0$, $n\uparrow\infty$ on a $\sigma_*^{\mathcal{F}} = \omega^{\mathcal{F}}$ et par suite $\sigma_B^{\mathcal{F}} \leq \omega^{\mathcal{F}}$.

Proposition III.12.

Sous les conditions $L = \limsup\{(\log n)/\lambda_n\} < +\infty$, $n\uparrow\infty$ on a $\sigma_B^f \leq \omega^f + L$ et $\sigma_B^{\mathcal{F}} \leq \omega^{\mathcal{F}} + L$.

Si $\omega^f = +\infty$ ou $\omega^{\mathcal{F}} = +\infty$, l'inégalité correspondante est trivialement exacte. Supposons donc $\omega^f < +\infty$ et $\omega^{\mathcal{F}} < +\infty$. Il est trivial que $\sigma_B^{\mathcal{F}} \leq \sigma_A^{\mathcal{F}}$ et $\sigma_B^f \leq \sigma_A^f$. Il nous suffit donc de montrer l'inégalité $\sigma_A^f \leq \omega^f + L$, l'inégalité $\sigma^\theta \leq \omega^{\mathcal{F}} + L$ s'en déduisant en remplaçant l'élément dirichlétien $\{f\}$, par l'élément dirichlétien $\{\theta\}$.

Soit $s = \sigma + i\tau$ avec $\sigma > \omega^f + L$. Se donnant $c \in]L, \sigma - \omega^f[$, il existe un entier p tel que $\forall n > p : \sigma - |a_n|^*/\lambda_n > c$.

Par suite $\forall n > p$, $|a_n \exp(-s\lambda_n)| = \exp[-\lambda_n(\sigma - |a_n|^*/\lambda_n)] < \exp(-\lambda_n c)$ L'élément dirichlétien $\sum_p^\infty \exp(-\lambda_n z)$ converge absolument pour $\Re(z) > L$; s appartient donc au demi-plan de convergence absolue de $\{f\}$, d'où le résultat annoncé.

Proposition III.13.

Sous les conditions $L < +\infty$ et $\sup \sigma_B^f < \sigma_B^{\mathcal{F}} < +\infty$ on a :

$$\sigma_*^{\mathcal{F}} - \sigma_s^{\mathcal{F}} \leq L .$$

La condition $\sup \sigma_B^f < \sigma_B^{\mathcal{F}} < +\infty$ entraîne : $\sigma_B^{\mathcal{F}} \leq \sigma_s^{\mathcal{F}} \leq \sigma_*^{\mathcal{F}}$ (Prop.III.9) On a vu par ailleurs qu'on avait :

$$\omega^{\mathcal{F}} \leq \sigma_B^{\mathcal{F}} \leq \sigma_*^{\mathcal{F}} \leq \sigma^\theta \leq \omega^{\mathcal{F}} + L .$$

On en déduit :

$$\omega^{\mathcal{F}} \leq \sigma_s^{\mathcal{F}} \leq \sigma_*^{\mathcal{F}} \leq \omega^{\mathcal{F}}+L \quad .$$

Corollaire III.13.1.

Sous les conditions $L = 0$ et $\sup \sigma_c^f < \sigma^{\mathcal{F}} < +\infty$ on a :

$$\sigma_s^{\mathcal{F}} = \sigma^{\mathcal{F}} = \sigma_*^{\mathcal{F}} = \omega^{\mathcal{F}} \quad .$$

La condition $L = 0$, entraîne :

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad , \quad \sigma_c^f = \sigma_B^f \quad \text{(corollaire III.10.2)}$$

$$\sigma^{\theta} = \sigma_*^{\mathcal{F}} = \sigma^{\mathcal{F}} = \omega^{\mathcal{F}} = \sigma_B^{\mathcal{F}} \quad \text{(corollaire III.11.2)} \ .$$

L'hypothèse $\sup \sigma_c^f < \sigma^{\mathcal{F}} < +\infty$ s'écrit alors $\sup \sigma_B^f < \sigma_B^{\mathcal{F}} < +\infty$. Il s'en suit : $\sigma_*^{\mathcal{F}} = \sigma_s^{\mathcal{F}}$ (Prop.III.13) et le résultat annoncé.

CHAPITRE IV

On considère deux suites de constantes complexes (λ_n) et (a_n). On suppose que la suite (λ_n) satisfait à la condition :

la suite associée des valeurs absolues des λ_n, $(|\lambda_n|)$, est une D-suite, avec, en outre, $\lambda_1 \neq 0$,

et que les constantes a_n sont non-nulles.

On considère l'élément dirichlétien suivant :

$$\{f\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-s\lambda_n) .$$

On désigne par $\operatorname{Arg} \lambda_n$ l'argument principal de λ_n ($\equiv \operatorname{Arg} \lambda_n \in]-\pi,\pi]$) et on pose :

$$\forall_{s\in\mathbb{C}} \quad d(n,s) = -\log|a_n \exp(-s\lambda_n)|/|\lambda_n|$$

(on rappelle que $\log x$ désigne le logarithme principal de x et est donc réel si x est strictement positif). On a :

$$|a_n \exp(-s\lambda_n)| = \exp[-|\lambda_n| d(n,s)]$$

ou, ce qui est équivalent,

$$d(n,s) = -\log |a_n|/|\lambda_n| + \Re\{s \exp(i \operatorname{Arg} \lambda_n)\} .$$

On pose :

$$\forall_{s\in\mathbb{C}} \quad d_*(s) = \liminf\{d(n,s) | n \in \mathbb{N}-\{0\}\}$$
$$d^*(s) = \limsup\{d(n,s) | n \in \mathbb{N}-\{0\}\} .$$

$d_* : s \mapsto d_*(s)$ et $d^* : s \mapsto d^*(s)$ sont deux applications à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Il est trivial que :

$$\forall_{(s,s')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}} \quad , \quad \forall_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} \quad , \quad |d(n,s) - d(n,s')| \leq |s-s'| \quad ;$$

résultat qui implique :

1) $\exists_{s\in\mathbb{C}} \; d_*(s) \in \mathbb{R} \equiv \forall_{s\in\mathbb{C}} \; d_*(s) \in \mathbb{R}$

2) $\exists_{s\in\mathbb{C}} \; d_*(s) = +\infty \equiv \forall_{s\in\mathbb{C}} \; d_*(s) = +\infty$

3) $\exists_{s\in\mathbb{C}} \; d_*(s) = -\infty \equiv \forall_{s\in\mathbb{C}} \; d_*(s) = -\infty$

et donc

$$\exists_{s\in\mathbb{C}} \; d_*(s) \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall_{(s,s')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}} \; |d_*(s)-d_*(s')| \leq |s-s'| \quad .$$

Les trois équivalences ci-dessus sont encore vraies en substituant d^* à d_* .

Remarques.-

1) $\exists_{s\in\mathbb{C}} \; , \; d_*(s) \in \mathbb{R} \Rightarrow d_*$ est une application lipschitzienne concave sur son support $\mathbb{C}$.

2) $\exists_{s\in\mathbb{C}} \; , \; d^*(s) \in \mathbb{R} \Rightarrow d^*$ est une application lipschitzienne convexe sur son support $\mathbb{C}$.

On pose :

$$\forall_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad , \quad D_{*,\alpha} = \{s\in\mathbb{C} \mid d_*(s) > \alpha\}$$
$$D^*_\alpha = \{s\in\mathbb{C} \mid d^*(s) < \alpha\} \quad .$$

Remarques.-

1) $\exists_{s\in\mathbb{C}} \; d_*(s) = +\infty \Rightarrow \forall_{\alpha\in\mathbb{R}} \; D_{*,\alpha} = \mathbb{C}$

2) $\exists_{s\in\mathbb{C}} \; d_*(s) = -\infty \Rightarrow \forall_{\alpha\in\mathbb{R}} \; D_{*,\alpha} = \phi$

3) $\exists_{s\in\mathbb{C}} \; d_*(s) \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall_{\alpha\in\mathbb{R}} \; D_{*,\alpha}$ est un ouvert convexe de $\mathbb{C}$

4) l'application $\mathbb{R} \ni \alpha \mapsto D_{*,\alpha}$ est "décroissante".

Dans ce qui suit K désigne un compact de $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}-\{0\}$.

Proposition IV.1.

L'implication suivante est vraie :

$$\forall_{\alpha}\ \{D_{*,\alpha}\neq\phi \Rightarrow \forall_{K\in D_{*,\alpha}}\ \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*}\ \exists_{\mu\in\mathbb{R}_+^*}\ \forall_{s\in K}\ \forall_{n\in\mathbb{N}^*}\ |a_n\exp(-s\lambda_n)|<\mu\exp[-|\lambda_n|(\alpha-\varepsilon)]\}$$

On rappelle que pour une valeur de α l'implication (considérée comme une disjonction propositionnelle) est vraie par définition si pour cette valeur de α, $D_{*,\alpha}=\phi$. On suppose $D_{*,\alpha}\neq\phi$ et soit K un compact de $D_{*,\alpha}$. On a :

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*}\ \forall_{s\in K}\ \exists_{p}\ \forall_{n(\geq p)\in\mathbb{N}^*},\quad d(n,s) > \alpha - \varepsilon/2$$

(il est trivial que $p = p_{\varepsilon,s}$) et ($d_{s,\varepsilon/2}$ désignant le disque ouvert de centre s et de rayon égal à $\varepsilon/2$)

$$\forall_{s'\in d_{s,\varepsilon/2}}\ \forall_{n(\geq p)\in\mathbb{N}^*}\quad d(n,s') \geq d(n,s)-|s-s'| > \alpha-\varepsilon$$

et

$$|a_n\exp(-s'\lambda_n)| < \exp[-|\lambda_n|(\alpha-\varepsilon)]\ ;$$

donc

$$\exists_{\mu\in\mathbb{R}_+^*}\ \forall_{s'\in d_{s,\varepsilon/2}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}^*}\quad |a_n\exp(-s'\lambda_n)| < \mu\exp[-|\lambda_n|(\alpha-\varepsilon)]$$

(il est trivial que $\mu = \mu_{\varepsilon,s}$).

$\varepsilon\,(\in\mathbb{R}_+^*)$ étant fixé, la famille des disques ouverts $d_{s,\varepsilon/2}$ indexés par s sur K est un recouvrement ouvert de K et donc :

$$\exists_{\{s_1,s_2,\ldots,s_j\}\subset K}\quad \bigcup_{t=1}^{j} d_{s_t,\varepsilon/2} \supset K$$

on pose :

$$\mu^* = \mathrm{Max}\{\mu_{\varepsilon,s_t}\in\mathbb{R}^*\,|\,t\in\{1,2,\ldots,j\}\},$$

et on a :

$$\forall_{s\in K}\ \forall_{n\in\mathbb{N}^*}\quad |a_n \exp(-s\lambda_n)|<\mu^* \exp[-|\lambda_n|(\alpha-\epsilon)] \ .$$

On pose :

$$L = \limsup\{\log n/|\lambda_n| \ \big| n\in\mathbb{N}^*\} \ .$$

Proposition IV.2.

$$L \in \mathbb{R}_+ \wedge D_{*,L} \neq \phi \Rightarrow \forall_{K\subset D_{*,L}} \{\text{l'élément dirichlétien } \{f\} \text{ converge absolument et uniformément sur } K\}$$

sous la condition (supposée satisfaite), $L \in \mathbb{R}_+$ et $D_{*,L} \neq \phi$, on a :

$$\forall_K \{K\subset D_{*,L} \Rightarrow \exists_{s\in D_{*,L}} \ s \notin K\}$$

puisque $D_{*,L}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et que K est un fermé borné, et donc pour $K \subset D_{*,L}$:

$$\exists_{\alpha>L}\ \forall_{s\in K}\ d_*(s) \geq \alpha \ .$$

En effet, si cette assertion est fausse, on a :

$$\forall_{\alpha>L}\ \exists_{s\in K}\ d_*(s) < \alpha \ .$$

On considère alors une suite (α_n) strictement décroissante et convergente vers L et on a :

$$\forall_{n\in\mathbb{N}^*}\ \exists_{s_n\in K}\ d_*(s_n) < \alpha_n \ .$$

De la suite (s_n) on peut extraire une sous-suite (s_{n_j}) convergente vers un certain point s_o de K et on a (continuité au sens de Heine de l'application lipschitzienne d_*) :

$$\lim d_*(s_{n_j}) = d_*(\lim s_{n_j}) = d_*(s_o) \leq \alpha \Rightarrow s_o \notin D_{*,\alpha} \ .$$

Or $s_o \in K \Rightarrow s_o \in D_{*,\alpha}$.

La contradiction établit la validité de l'assertion, on a :

$$\exists_{\alpha>L}\ \forall_{s\in K}\ d_*(s) \geq \alpha \Rightarrow \forall_{\epsilon\in\mathbb{R}_+^*}\ K \subset D_{*,\alpha-\epsilon}$$

et

$$\forall_{\varepsilon} \quad \{\exists \varepsilon \in]0, \alpha - L[\Rightarrow K \subset D_{*,\alpha-\varepsilon} \subset D_{*,\alpha-2\varepsilon} \subset D_{*,L+\varepsilon}\} \quad ,$$

et donc, eu égard à la proposition IV.1 où ici $(\alpha-\varepsilon)$ joue le rôle de α dans cette proposition :

$$\exists_{\mu \in \mathbb{R}_+^*} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}^*} \quad \forall_{s \in K} \quad |a_n \exp(-s\lambda_n)| < \mu \exp[-|\lambda_n|(L+\varepsilon)] \quad .$$

L'élément dirichlétien $\{f\}$ converge absolument et uniformément sur chaque compact K appartenant à $D_{*,L}$.

Remarques.-

Les remarques qui suivent, de type topologique, sont élémentaires :

1) $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \quad \overline{D_{*,\alpha}} = \{s \in \mathbb{C} \mid d_*(s) \geq \alpha\}$ (où $\overline{D_{*,\alpha}}$ désigne l'adhérence de $D_{*,\alpha}$).

Il est évident que $\overline{D_{*,\alpha}} \subset \{s \in \mathbb{C} | d_*(s) \geq \alpha\}$ puisque d_* est continue et que l'adhérence de l'ouvert $D_{*,\alpha}$ est contenue dans tout fermé contenant $D_{*,\alpha}$. Il suffit donc de prouver la validité de l'inclusion réciproque. On a :

$$\{s \in \mathbb{C} \mid d_*(s) \geq \alpha\} = D_{*,\alpha} \cup \{s \in \mathbb{C} \mid d_*(s) = \alpha\} \quad .$$

Soit $s' \in \{s \in \mathbb{C} \mid d_*(s) = \alpha\}$ et soit $s'' \in D_{*,\alpha}$. On a :

$$\forall_{t \in]0,1]} \quad \{s = ts'' + (1-t)s' \Rightarrow d_*(s) \geq t d_*(s'') + (1-t) d_*(s') > \alpha\}$$

d'où $s' \in \overline{D_{*,\alpha}}$, et en définitive

$$\forall_{s'} \left[s' \in \{s \in \mathbb{C} \mid d_*(s) = \alpha\} \Rightarrow s' \in \overline{D_{*,\alpha}} \right] \equiv \{s \in \mathbb{C} | d_*(s) = \alpha\} \subset \overline{D_{*,\alpha}}$$

et

$$\{s \in \mathbb{C} \mid d_*(s) \geq \alpha\} \subset D_{*,\alpha} \cup \overline{D_{*,\alpha}} = \overline{D_{*,\alpha}} \quad .$$

2) $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \quad Fr(D_{*,\alpha}) = \{s \in \mathbb{C} \mid d_*(s) = \alpha\}$.

On sait que :

$$\overline{D_{*,\alpha}} = D_{*,\alpha} \cup Fr(D_{*,\alpha})$$

$$Int(\overline{D_{*,\alpha}}) \cap Fr(\overline{D_{*,\alpha}}) = \emptyset \quad .$$

Or

$$D_{*,\alpha} \subset \mathrm{Int}(\overline{D_{*,\alpha}}) \wedge \mathrm{Fr}(D_{*,\alpha}) \subset \mathrm{Fr}(\overline{D_{*,\alpha}})$$

donc

$$\overline{D_{*,\alpha}} = D_{*,\alpha} \cup \mathrm{Fr}(D_{*,\alpha}) \wedge D_{*,\alpha} \cap \mathrm{Fr}(D_{*,\alpha}) = \phi \ .$$

Rapprochant de

$$\overline{D_{*,\alpha}} = D_{*,\alpha} \cup \{s\in\mathbb{C} \mid d_*(s) = \alpha\} \wedge D_{*,\alpha} \cap \{s\in\mathbb{C} \mid d_*(s) = \alpha\} = \phi \ ,$$

la proposition est évidente.

3) $\underset{\alpha\in\mathbb{R}}{\forall} \ \mathrm{Int}(\overline{D_{*,\alpha}}) = D_{*,\alpha}$.

Il est évident que $\mathrm{Int}\{\mathrm{Fr}(D_{*,\alpha})\} = \phi$ puisque tout point de $\mathrm{Fr}(D_{*,\alpha})$ est point d'accumulation pour l'ouvert $D_{*,\alpha}$. En outre,

$$\mathrm{Int}(\overline{D_{*,\alpha}}) = \mathrm{Int}(D_{*,\alpha}) \cup \mathrm{Int}\{\mathrm{Fr}(D_{*,\alpha})\}$$

puisque

$$D_{*,\alpha} \cap \mathrm{Fr}(D_{*,\alpha}) = \phi \ .$$

Donc

$$\mathrm{Int}(\overline{D_{*,\alpha}}) = \mathrm{Int}(D_{*,\alpha}) = D_{*,\alpha} \ .$$

Proposition IV.3.

{f} diverge sur $\mathbb{C} - \overline{D_{*,o}}$.

Il est trivial que la proposition n'a d'intérêt que si $\mathbb{C} - \overline{D_{*,o}} \neq \phi$; alors on a :

$$s \in \mathbb{C} - \overline{D_{*,o}} \equiv d_*(s) < 0$$

et

$$\underset{s}{\forall} \{d_*(s) < 0 \Rightarrow \underset{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}{\exists} d_*(s) < -\alpha\} \ ;$$

donc

$$\underset{s\in\mathbb{C}-\overline{D_{*,o}}}{\forall} \ \underset{(n_j)\subset\mathbb{N}^*}{\exists} \{d(n_j,s) < -\alpha \Rightarrow |a_{n_j} \exp(-s\lambda_{n_j})| > \exp(\alpha|\lambda_{n_j}|) > 1\}$$

{f} diverge en chaque point s de $\mathbb{C} - \overline{D_{*,o}}$.

Proposition IV.4.

Si $L = 0$, l'ouvert $D_{*,o}$ est à la fois l'ouvert maximal de convergence simple et l'ouvert maximal de convergence absolue de l'élément dirichlétien $\{f\}$.

Cette proposition résulte trivialement des deux propositions précédentes, eu égard à l'égalité : $\mathrm{Int}(\overline{D_{*,\alpha}}) = D_{*,\alpha}$.

Proposition IV.5.

$\{f\}$ ne converge absolument en aucun point de D_L^*.

La démonstration est immédiate.

E étant une partie arbitraire de $\mathbb{C}$, on pose :

$$\forall_{s\in\mathbb{C}} \quad \mathbb{N}^*_{s,E} = \{n\in\mathbb{N}^* \mid d(n,s)\exp(i \operatorname{Arg} \lambda_n) \in E\}$$

et on considère la famille des $\mathbb{N}^*_{s,E}$ indexés par le couple (s,E) sur $\mathbb{C} \times \wp(\mathbb{C})$. Si $\mathbb{N}^*_{s,E}$ est une partie infinie de $\mathbb{N}^*$, on ordonne les entiers de $\mathbb{N}^*_{s,E}$ en une sous-suite strictement croissante de $\mathbb{N}^*$, que l'on note (n_p), $p \in \mathbb{N}^*$. On désigne par L_s l'application d'ensemble suivante :

$$\wp(\mathbb{C}) \ni E \mapsto L_s(E) = \left\{ \begin{array}{l} \limsup\{\log p/|\lambda_{n_p}| \mid p\in\mathbb{N}^*\} \text{ si } \mathbb{N}^*_{s,E} \text{ est infinie} \\ -\infty \text{ si } \mathbb{N}^*_{s,E} \text{ est fini ou vide.} \end{array} \right\}$$

et par $\mathfrak{L}$ la famille des applications L_s indexées par s sur $\mathbb{C}$. On a :

$$L_s(E) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} .$$

On désigne par $\{f\}_E$ l'élément dirichlétien suivant :

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{n_p} \exp(-s\lambda_{n_p}) \quad \text{(si } \mathbb{N}^*_{s,E} \text{ est infini) ;}$$

$\{f\}_E$ désignant un polynôme exponentiel formé des termes $a_n \exp(-s\lambda_n)$ dont les indices appartiennent à $\mathbb{N}^*_{s,E}$, si $\mathbb{N}^*_{s,E}$ est fini.

Remarques.-

Il est trivial que :

1) $\forall_{s\in\mathbb{C}} \quad L_s(\mathbb{C}) = L$.

2) $\forall_{L_s\in\mathfrak{L}} \quad L_s$ est une application d'ensemble "croissante".

On pose, comme il est usuel (δ désignant la métrique euclidienne associée à $\mathbb{C}$) :

$$\mathrm{dist}(s,E) = \mathrm{Inf}\{\delta(s,s') \mid s'\in E\}$$

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*} \quad E_\varepsilon = \{s\in\mathbb{C} \mid \mathrm{dist}(s,E) < \varepsilon\}$$

(on sait que $\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*} E_\varepsilon = \bar{E}$; $\bar{E}$ désignant l'adhérence de E) et

$$\forall_{E\in\wp(\mathbb{C})} \quad \forall_{L_s\in\mathfrak{L}} \quad L_{*,s}(E) = \lim L_s(E_\varepsilon) \ , \ \varepsilon\downarrow 0 \ .$$

Remarques.-

1) L'application d'ensemble (indexée par s sur $\mathbb{C}$)

$$L_{*,s} : \wp(\mathbb{C}) \ni E \to L_{*,s}(E)$$

est "croissante".

2) $$\forall_{E\in\wp(\mathbb{C})} \quad \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*} \quad L_{*,s}(E_\varepsilon) \geq L_{*,s}(\bar{E}) \geq L_{*,s}(E) \geq L_s(E)$$

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*} \quad \forall_{\varepsilon'\in\mathbb{R}_+^*} \quad L_s(E_{\varepsilon+\varepsilon'}) = L_s[(E_\varepsilon)_{\varepsilon'}] \geq L_{*,s}(E_\varepsilon)$$

et donc

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}^*} \quad L_s(E_{2\varepsilon}) \geq L_{*,s}(E_\varepsilon) \Rightarrow L_{*,s}(E) \geq \lim L_{*,s}(E_\varepsilon) \ , \ \varepsilon \downarrow 0 \ ;$$

en définitive

$$L_{*,s}(E) = L_{*,s}(\bar{E}) = \lim L_{*,s}(E_\varepsilon) \ , \ \varepsilon \downarrow 0 \ .$$

3) Soit un point $s_o \in \mathbb{C}$ et $E = \{s_o\}$. Il est trivial que $E_\varepsilon = \{s_o\}_\varepsilon$ est un disque ouvert de centre s_o et de rayon égal à ε , puisque $\mathrm{dist}(s,\{s_o\}) = \delta(s,s_o) = (s-s_o)$. On convient, par analogie avec la définition de E_ε , de poser

$$\{\infty\}_\varepsilon = \{s\in\mathbb{C} \mid \mathrm{dist}(s,\{\infty\}) < \varepsilon\} \ ,$$

avec $\text{dist}(s,\{\infty\}) = \delta(s,\infty)$, en choisissant

$$\forall_{s\in\overline{\mathbb{C}}} \quad \delta(s,\infty) = 1/|s| \quad , \quad \text{avec} \quad \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad .$$

Avec ce choix de l'extension δ de $\mathbb{C}$ à $\overline{\mathbb{C}}$, $\{\infty\}_\epsilon$ est le voisinage annulaire du point ∞ et de rayon égal à ϵ . (On rappelle que δ associé à $\overline{\mathbb{C}}$ n'est pas une "véritable" métrique sur $\overline{\mathbb{C}}$; cependant sa restriction à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ est la métrique euclidienne classique sur $\mathbb{C}$. On remarquera qu'on peut définir par voie métrique les ouverts à l'aide de δ et définir ainsi une topologie du type d'Hausdorff sur $\overline{\mathbb{C}}$).

Proposition IV.6.

E étant une partie arbitraire de $\mathbb{C}$, E_1 *et* E_2 *étant deux parties de* E *telles que* $E = E_1 \cup E_2$, *on a :*

$$\forall_{s\in\mathbb{C}} \quad L_{*,s}(E) = \text{Max}\{L_{*,s}(E_1), L_{*,s}(E_2)\} \quad .$$

La proposition est triviale en un point s de $\mathbb{C}$ si $\mathbb{N}^*_{s,E}$ est fini ou vide ou si, $\mathbb{N}^*_{s,E}$ étant infini, l'un au moins des deux ensembles E_1 , E_2 est fini ou vide.

Dans le cas où $\mathbb{N}^*_{s,E_1}$ et $\mathbb{N}^*_{s,E_2}$ sont infinis, on ordonne les trois ensembles $\mathbb{N}^*_{s,E}$, $\mathbb{N}^*_{s,E_1}$ et $\mathbb{N}^*_{s,E_2}$ en sous-suites strictement croissantes de $\mathbb{N}^*$, que l'on note respectivement (n_p) , (n^1_j) et (n^2_j) . On pose :

$$\forall_{i\in\{1,2\}} \quad \forall_{p\in\mathbb{N}^*} \quad j^i_p = \text{Max}\{j\in\mathbb{N}^* \mid n^i_j \leq n_p\} \quad .$$

Il est trivial que :

1) $$\forall_{n\in\mathbb{N}^*} \quad \{n\in\mathbb{N}^*_{s,E} \equiv n\in\mathbb{N}^*_{s,E_1} \vee n\in\mathbb{N}^*_{s,E_2}\}$$

et

$$\mathbb{N}^*_{s,E} = \mathbb{N}^*_{s,E_1} \cup \mathbb{N}^*_{s,E_2} \quad .$$

2) $$\forall_{i\in\{1,2\}} \quad \forall_{p\in\mathbb{N}^*} \quad n^i_{j^i_p} \leq n_p$$

et

$$j_p^1 + j_p^2 \geq p \Rightarrow \mathrm{Max}\{j_p^i | i\in\{1,2\}\} \geq p/2 \ .$$

On a :

$$L_s(E) = \limsup\{\log p/|\lambda_{n_p}| \ | \ p\in\mathbb{N}^*\}$$

$$L_s(E_i) = \limsup\{\log j_p^i/|\lambda_{n_{j_p^i}}| \ | \ p\in\mathbb{N}^*\}$$

et

$$\forall_{i\in\{1,2\}} \quad \log j_p^i/|\lambda_{n_{j_p^i}}| \geq \log j_p^i/|\lambda_{n_p}|$$

$$\forall_{p\in\mathbb{N}^*} \ \exists_{i\in\{1,2\}} \quad \log j_p^i/|\lambda_{n_p}| \geq \log(p/2)/|\lambda_{n_p}| \ ;$$

d'où l'on déduit :

$$L_s(E) \leq \mathrm{Max}\{L_s(E_i) | i\in\{1,2\}\}$$

et

$$L_{*,s}(E) \leq \mathrm{Max}\{L_{*,s}(E_i) | i\in\{1,2\}\} \ .$$

Or il est trivial que :

$$\forall_{i\in\{1,2\}} \quad L_s(E) \geq L_s(E_i)$$

et

$$\forall_{i\in\{1,2\}} \quad L_{*,s}(E) \geq L_{*,s}(E_i) \ .$$

De ces deux derniers résultats on déduit la propriété énoncée. Plus généralement :

Proposition IV.7.

E étant une partie arbitraire de $\mathbb{C}$; une suite finie (E_i), $i\in\{1,2,\ldots,n_o\}$, de parties de E étant un recouvrement de E, on a

$$\forall_{s\in\mathbb{C}} \quad L_{*,s}(E) = \mathrm{Max}\{L_{*,s}(E_i) | i\in\{1,2,\ldots,n_o\}\} \ .$$

Corollaire IV.8.1.

$$\forall_{E\subset\mathbb{C}} \ \{\overline{E} \text{ est compact} \Rightarrow \forall_{s\in\mathbb{C}} \ \exists_{s_1\in\overline{E}} \quad L_{*,s}(\{s_1\}) = L_{*,s}(\overline{E})\} \ .$$

Dire que la proposition est fausse est équivalent à :

$$\exists_{E_o \subset \mathbb{C}} \{\bar{E}_o \text{ est compact} \wedge \exists_{s \in \mathbb{C}} \forall_{s' \in \bar{E}_o} L_{*,s}(\{s'\}) < L_{*,s}(\bar{E}_o)\} ,$$

et on a (désignant par $d_{s',\rho_{s'}}$ le disque ouvert de centre s' et de rayon égal à $\rho_{s'}$)

$$\forall_{s' \in \bar{E}_o} \forall_{\varepsilon_{s'} \in]0, L_{*,s}(\bar{E}_o) - L_{*,s}(\{s'\})[} \exists_{\rho_{s'}>0} L_s(d_{s',\rho_{s'}}) < L_{*,s}(\{s'\}) + \varepsilon_{s'} < L_{*,s}(\bar{E}_o) .$$

La famille des disques $d_{s',\rho_{s'}}$ indexés par s' sur $\bar{E}_o$ formant un recouvrement ouvert de $\bar{E}_o$, on peut donc en extraire un ensemble fini (soient $d_{s'_j,\rho_{s'_j}}$, $j \in \{1,2,\ldots,n_o\}$, ces disques) formant un recouvrement de $\bar{E}_o$; on a :

$$\bigcup_{j=1}^{n_o} d_{s'_j,\rho_{s'_j}} \supset \bar{E}_o$$

et donc

$$L_{*,s}\left(\bigcup_{j=1}^{n_o} d_{s'_j,\rho_{s'_j}}\right) = \text{Max}\{L_{*,s}(d_{s'_j,\rho_{s'_j}}) \mid j \in \{1,2,\ldots,n_o\}\} \geq L_{*,s}(\bar{E}_o)$$

avec

$$\forall_{s' \in \bar{E}_o} L_{*,s}(d_{s',\rho_{s'}}) < L_{*,s}(\bar{E}_o) .$$

La contradiction établit l'assertion.

Corollaire IV.8.2.

$$\forall_{E \in \mathcal{P}(\mathbb{C})} \{\bar{E} \text{ est compact} \Rightarrow \forall_{s \in \mathbb{C}} L_{*,s}(E) = \text{Max}\{L_{*,s}(\{s'\}) \mid s' \in \bar{E}\} .$$

Corollaire IV.8.3.

$$\forall_{s \in \mathbb{C}} \exists_{s_1 \in \mathbb{C}} L = L_{*,s}(\{s_1\}) .$$

Dire que la propriété est fausse est équivalent à :

$$\exists_{s \in \mathbb{C}} \forall_{s_1 \in \mathbb{C}} L > L_{*,s}(\{s_1\})$$

(en particulier $L_{*,s}(\{\infty\}) < L$)

et donc

$$\forall_{E\in\mathcal{P}(\mathbb{C})} \quad (\bar{E} \text{ est compact} \Rightarrow L_s(E) \leq L_{*,s}(E) < L)$$

d'où

$$\forall_{E\in\mathcal{P}(\mathbb{C})} \quad (\bar{E} \text{ est compact} \Rightarrow L_{*,s}(\mathbb{C}-E) = L) \Rightarrow \forall_{\epsilon\in\mathbb{R}_+^*} \; L_{*,s}(\{\infty\}_\epsilon) = L \Rightarrow L_{*,s}(\{\infty\}) = L$$

La contradiction établit l'assertion.

Proposition IV.9.

L'implication suivante est vraie :

$$\forall_{(s,s')\in D_{*,o}\times D_{*,o}} \quad \forall_{(z,z')\in\mathbb{C}-\{0\}\times\mathbb{C}} \quad \left\{ \underbrace{s\neq s' \wedge z-z' = |s-s'|\cos[\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg}(s-s')]\exp(i \operatorname{Arg} z}_{\Downarrow} \right.$$

$$\left. L_{*,s}(\{z\}) = L_{*,s'}(\{z'\}) \right.$$

et, en outre, si $L_{*,s}(\{z\}) \geq 0$, on a alors $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} z'$.

On a :

$$\forall_{\substack{(s,s')\\ s\neq s'}} \quad d(n,s) - d(n,s') = |s-s'|\cos[\operatorname{Arg}(s-s') + \operatorname{Arg} \lambda_n]$$

et pour tout couple $(z,z') \in \mathbb{C}-\{0\}\times\mathbb{C}$ satisfaisant à la condition figurant dans le premier membre de l'implication on a :

$$[z'-d(n,s')\exp(i \operatorname{Arg} \lambda_n)] - [z-d(n,s)\exp(i \operatorname{Arg} \lambda_n)] =$$

$$(s-s')\exp(i \operatorname{Arg} z)\{\cos[\operatorname{Arg} \lambda_n + \operatorname{Arg}(s-s')]\exp[i(\operatorname{Arg} \lambda_n - \operatorname{Arg} z) - \cos[\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg}(s-s')]\}$$

si $L_{*,s}(\{z\}) \geq 0$, il est évident que :

$$\forall_{\epsilon\in\mathbb{R}_+^*} \quad \exists_{\lambda\in]0,\operatorname{Min}(\epsilon,|z|)[} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}^*_{s,\{z\}_\lambda}} \quad |\{\ldots\}| < \epsilon/|s-s'| \quad (\text{où } \mathbb{N}^*_{s,\{z\}_\lambda} \text{ est infini})$$

et donc

$$\forall_{n\in\mathbb{N}^*_{s,\{z\}_\lambda}} \quad |z' - d(n,s')\exp(i \operatorname{Arg} \lambda_n)| < \lambda+\epsilon < 2\epsilon \quad .$$

De cette dernière inégalité, on déduit :

$$\mathbb{N}^*_{s,\{z\}_\lambda} \subset \mathbb{N}^*_{s',\{z'\}_{2\epsilon}}$$

d'où

$$L_s(\{z\}_\lambda) \leq L_{s'}(\{z'\}_{2\epsilon})$$

et

$$0 \leq L_{*,s}(\{z\}) \leq L_{*,s'}(\{z'\}) \quad ,$$

on remarquera que :

$$d_*(s') > 0 \wedge L_{*,s'}(\{z'\}) \geq 0 \Rightarrow z' \in \mathbb{C} - \{0\} \quad ;$$

ce résultat eu égard à l'inégalité mentionnée implique $\text{Arg } z = \text{Arg } z'$.
Raisonnant sur le couple (s',z') comme on l'a fait sur (s,z) , on obtient :

$$0 \leq L_{*,s'}(\{z'\}) \leq L_{*,s}(\{z\}) \; ;$$

d'où la validité de la proposition dans le cas $L_{*,s}(\{z\}) \geq 0$.

Dans le cas $L_{*,s}(\{z\}) = -\infty$, la technique utilisée ci-dessus montre que, sous les conditions précisées, on a encore :

$$L_{*,s}(\{z\}) = L_{*,s'}(\{z'\})$$

(en effet $L_{*,s'}(\{z'\}) \geq 0 \Rightarrow L_{*,s'}(\{z'\}) = L_{*,s}(\{z\})$) , par contre, on n'est pas certain qu'on a encore $\text{Arg } z = \text{Arg } z'$.

Remarques.-

Le rappel des propriétés triviales suivantes est peut-être utile pour la suite de l'exposé :

1) $L_{*,s}(\{\infty\}) = -\infty \Leftrightarrow \underset{\epsilon\in\mathbb{R}^*_+}{\exists} \; \underset{\epsilon'\in]0,\epsilon]}{\forall} \; \mathbb{N}^*_{s,\{\infty\}_{\epsilon'}}$ est fini

$$\Leftrightarrow d_*(s) > -\infty \wedge d^*(s) < +\infty$$

2) $d_*(s) > 0 \Leftrightarrow d_*(s) \geq 0 \wedge L_{*,s}(\{0\}) = -\infty$

3) $d_*(s) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \underset{z}{\forall} \; \{|z| < d_*(s) \Rightarrow L_{*,s}(\{z\}) = -\infty\} \\ \underset{z}{\exists} \; \{|z| = d_*(s) \wedge L_{*,s}(\{z\}) \geq 0\} \end{cases}$.

Proposition IV.10.

L'espace image de l'application

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto L_{*,s}(\{\infty\})$$

se réduit à un point de $[0,+\infty] \cup \{-\infty\}$.

On a :

$$\forall_{\substack{(s,s')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C} \\ s\neq s'}} \quad \forall_{\rho\in]0,1/|s-s'|[} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}^*}$$

$$\{|d(n,s)-d(n,s')| \leq |s-s'| \wedge d(n,s) > 1/\rho\} \Rightarrow d(n,s') > 1/\rho'$$

(avec $\rho' = \rho/(1-\rho|s-s'|)$) et l'analogue en permutant s et s' ; d'où

$$\mathbb{N}^*_{s,\{\infty\}_\rho} \subset \mathbb{N}^*_{s',\{\infty\}_{\rho'}}$$

$$L_s(\{\infty\}_\rho) \leq L_{s'}(\{\infty\}_{\rho'})$$

$$L_{*,s}(\{\infty\}) \leq L_{*,s'}(\{\infty\})$$

et l'analogue en permutant s et s' . On a donc

$$\forall_{(s,s')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}} \quad L_{*,s}(\{\infty\}) = L_{*,s'}(\{\infty\}) ;$$

d'où le résultat annoncé.

Proposition IV.11.

L'application de $\overline{\mathbb{C}}$ dans $[0,+\infty] \cup \{-\infty\}$,

$$z \to L_{*,s}(\{z\}) \text{ , (indexée par } s \text{ sur } \mathbb{C})$$

est semi-continue supérieurement sur son support.

On a :

$$\forall_{z\in\overline{\mathbb{C}}} \quad \forall_{\epsilon\in\mathbb{R}^*_+} \quad \exists_{\lambda\in\mathbb{R}^*_+} \quad L_s(\{z\}_\lambda) \leq L_{*,s}(\{z\}) + \epsilon .$$

Or, désignant par $d_{z,\lambda}$ le disque ouvert de centre z et de rayon λ on a : (si $z = \infty$, on substitue au disque $d_{\infty,\lambda}$ un voisinage annulaire de rayon λ du point ∞)

$$\forall_{z'\in d_{z,\lambda}} \quad L_{*,s}(\{z'\}) \leq L_s(\{z\}_\lambda) \ ,$$

et ainsi :

$$\forall_{z\in\overline{\mathbb{C}}} \quad \forall_{\epsilon\in\mathbb{R}_+^*} \quad \forall_{z'\in d_{z,\lambda}} \quad L_{*,s}(\{z'\}) \leq L_{*,s}(\{z\}) + \epsilon \ .$$

L'assertion est établie.

Corollaire IV.11.1.

L'application de $\mathbb{C}$ dans $[-\infty,+\infty]$

$$z \mapsto [|z|-L_{*,s}(\{z\})] \ , \ (\text{indexée par } s \text{ sur } \mathbb{C})$$

est semi-continue inférieurement.

Corollaire IV.11.2.

Sous la condition L fini on a :

$$\exists_{z_o\in\mathbb{C}} \quad \mathrm{Inf}\{|z|-L_{*,s}(\{z\}) \mid z\in\mathbb{C}\} = |z_o| - L_{*,s}(\{z_o\}) \ .$$

On considère l'implication :

$$\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad L_{*,s}(\{z\}) = -\infty \Rightarrow \forall_{z\in\mathbb{C}} \quad |z| - L_{*,s}(\{z\}) = +\infty \ .$$

Si la proposition de gauche est vraie, l'assertion du corollaire en résulte puisque l'espace image de l'application considérée se réduit à $\{+\infty\}$.

Sinon $\exists_{z_o\in\mathbb{C}} \quad L_{*,s}(\{z_o\}) \geq 0$, et on a :

$$\forall_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*} \quad \forall_{z\in\mathbb{C}} \quad \{\alpha > |z_o|-L_{*,s}(\{z_o\}) \wedge |z| > L+\alpha \Rightarrow L+\alpha > |z_o| \wedge |z|-L_{*,s}(\{z\})>\alpha\}$$

Le minimum de l'image du disque compact $d_{o,L+\alpha} = \{z\in\mathbb{C} \mid |z| \leq L+\alpha\}$ par l'application est donc aussi celui du minimum de l'image de $\mathbb{C}$ par cette application (considérée au (IV.11.1)).

Si et seulement si L est fini, on pose :

$$\forall_{s\in\mathbb{C}} \quad \rho_s = \mathrm{Min}\{|z|-L_{*,s}(\{z\}) \mid z\in\mathbb{C}\}$$

et

$$\forall_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad \Delta_\alpha = \{s\in D_{*,o} \mid \rho_s > \alpha\} \ .$$

Il est trivial que :

$$1)\quad \exists_{s_o\in\mathbb{C}}\ \rho_{s_o} = +\infty \Leftrightarrow L < +\infty \wedge \forall_{z\in\mathbb{C}}\ L_{*,s_o}(\{z\}) = -\infty \quad .$$

$$2)\quad \exists_{s_o\in D_{*,o}}\ \rho_{s_o} = +\infty \Rightarrow \forall_{s\in\mathbb{C}}\ d_*(s) = +\infty \Rightarrow \forall_{s\in\mathbb{C}}\ \rho_s = +\infty \quad .$$

$$2')\quad \exists_{s_o\in\mathbb{C}}\ \rho_{s_o} = +\infty \Rightarrow \{\forall_{s\in\mathbb{C}}\ d_*(s) = +\infty \vee \forall_{s\in\mathbb{C}}\ d_*(s) = -\infty\}$$
$$\Rightarrow \forall_{s\in\mathbb{C}}\ \rho_s = +\infty \quad .$$

3) L'application $\mathbb{R} \ni \alpha \mapsto \Delta_\alpha$ est "décroissante".

Proposition IV.12.

$$\forall_{\alpha\in\mathbb{R}_-}\ \Delta_\alpha \subset D_{*,\alpha} \quad .$$

On a :

$$\forall_{\alpha\in\mathbb{R}}\ \Delta_\alpha \subset D_{*,o} \subset D_{*,\alpha}$$

et

$$\forall_{\alpha\in\mathbb{R}_+}\ \{s\in\Delta_\alpha \Rightarrow \rho_s > \alpha \Rightarrow \forall_{z\in\mathbb{C}}\ |z| - L_{*,s}(\{z\}) \geq \rho_s > \alpha\} \quad .$$

Notant d_{o,ρ_s} le disque ouvert de centre $z = 0$ et de rayon ρ_s, on a donc :

$$\forall_{z\in d_{o,\rho_s}}\ L_{*,s}(\{z\}) = -\infty \quad .$$

En définitive (puisque $\rho_s > \alpha$)

$$\forall_{\alpha\in\mathbb{R}_+}\ \{s\in\Delta_\alpha \Rightarrow d_*(s) > \alpha (\equiv s\in D_{*,\alpha})\}$$

et donc

$$\forall_{\alpha\in\mathbb{R}_+}\ \Delta_\alpha \subset D_{*,\alpha} \quad .$$

Proposition IV.13.

L'implication suivante est vraie :

$$\forall_{s\in D_{*,o}}\ \{\forall_{z\in\mathbb{C}}\ L_{*,s}(\{z\}) = -\infty \wedge L < +\infty \Rightarrow \forall_{\alpha\in\mathbb{R}}\ \Delta_\alpha = D_{*,\alpha} = \mathbb{C}\} \quad .$$

S'il existe s_o de $D_{*,o}$ tel que $\underset{z\in\mathbb{C}}{\forall} L_{*,s_o}(\{z\}) = -\infty$, on a, comme on a vu antérieurement, $\underset{s\in\mathbb{C}}{\forall} d_*(s) = +\infty$.

De cette dernière propriété, résulte que :

$$\underset{\alpha\in\mathbb{R}}{\forall} D_{*,\alpha} = \mathbb{C} \quad \text{(et, en particulier, } D_{*,o} = \mathbb{C}\text{)} .$$

En outre, eu égard à $L < +\infty$, on a :

$$\underset{s\in\mathbb{C}}{\forall}\ \underset{z\in\mathbb{C}}{\forall}\ |z| - L_{*,s}(\{z\}) = +\infty \Rightarrow \underset{s\in\mathbb{C}}{\forall} \rho_s = +\infty \Rightarrow \underset{\alpha\in\mathbb{R}}{\forall} \Delta_\alpha = \mathbb{C} .$$

Proposition IV.14.

Sous les conditions :

$$L < +\infty \quad \text{et} \quad \underset{s_o\in D_{*,o}}{\exists}\ \underset{z\in\mathbb{C}}{\forall} L_{*,s_o}(\{z\}) \leq 0 .$$

on a :

$$\begin{cases} \alpha \geq 0 \Rightarrow \Delta_\alpha = D_{*,\alpha} \\ \alpha < 0 \Rightarrow \Delta_\alpha = D_{*,o} \end{cases} .$$

On considère un point quelconque $s_1 \ (\neq s_o) \in D_{*,o}$. Si on a $\underset{z\in\mathbb{C}}{\forall} L_{*,s_1}(\{z\}) = -\infty$, on sait qu'alors $\underset{\alpha\in\mathbb{R}}{\forall} \Delta_\alpha = D_{*,\alpha} = \mathbb{C}$, sinon

$$\underset{z_1\in\mathbb{C}}{\exists} L_{*,s_1}(\{z_1\}) \geq 0 \Rightarrow d_*(s_1) < +\infty$$

(plus précisément $z_1 \in \mathbb{C} - \{0\}$ puisque $s_1 \in D_{*,o} \equiv d_*(s_1) > 0 \Rightarrow L_{*,s_1}(\{0\}) = -\infty$) . On sait que :

$$\underset{z_o\in\mathbb{C}-\{0\}}{\exists} L_{*,s_1}(\{z_1\}) = L_{*,s_o}(\{z_o\}) ,$$

et donc (eu égard à la condition figurant dans l'énoncé de la proposition)

$$L_{*,s_o}(\{z_o\}) = L_{*,s_1}(\{z_1\}) = 0 .$$

Remarquant alors que

$$\underset{z}{\forall} [z\in\{\xi\in\mathbb{C} \mid |\xi| < d_*(s_1)\} \Rightarrow L_{*,s_1}(\{z\}) = -\infty]$$

et

$$\underset{z\in\{\xi\in\mathbb{C}\,|\,|\xi| = d_*(s_1)\}}{\exists} L_{*,s_1}(\{z\}) \geq 0 \quad ,$$

on obtient

$$\rho_{s_1} = \mathrm{Min}\{|z| - L_{*,s_1}(\{z\}) \,|\, z\in\mathbb{C}\} = d_*(s_1)$$

et donc

$$\underset{\alpha\in\mathbb{R}_+}{\forall} \Delta_\alpha = D_{*,\alpha}$$

$$\underset{\alpha\in\mathbb{R}^*_-}{\forall} \{\Delta_o \subset \Delta_\alpha \subset D_{*,o} \wedge \Delta_o \supset D_{*,o}\}$$

donc

$$\underset{\alpha\in\mathbb{R}^*_-}{\forall} \Delta_\alpha = D_{*,o} \quad .$$

Proposition IV.15.

L'implication suivante est vraie :

$$\underset{s'}{\forall} \{s'\in D_{*,o} \wedge \rho_{s'} < +\infty \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\text{la restriction de l'application } \mathbb{C}\ni s\mapsto \rho_s \\ \text{à } D_{*,o} \text{ est une application concave}\end{array}\right.\} \quad .$$

Soit s' satisfaisant aux conditions figurant dans le membre de gauche de l'implication ; on a :

$$\rho_{s'} < +\infty \Rightarrow \underset{s\in D_{*,o}}{\forall} \rho_s < +\infty \quad .$$

Eu égard à la condition $L < +\infty$ (figurant dans la définition de ρ_s) , on a :

$$\underset{s\in D_{*,o}}{\forall} \underset{z\in\mathbb{C}}{\exists} L_{*,s}(\{z\}) \leq L < +\infty$$

et donc

$$\underset{s\in D_{*,o}}{\forall} \rho_s > -\infty \quad , \text{ et enfin } \underset{s\in D_{*,o}}{\forall} \rho_s \in \mathbb{R} \quad .$$

On considère deux points quelconques distincts s_o et s_1 appartenant à $D_{*,o}$, et on pose pour $t \in [0,1]$: $s = ts_1 + (1-t)s_o$. Pour chaque t de $[0,1]$ on a donc (puisque $D_{*,o}$ est convexe) :

$$d_*(s) > 0$$

et

$$L_{*,s}(\{0\}) = -\infty \quad ;$$

soit $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ et, remarquant que

$$s-s_1 = (1-t)(s_o-s_1)$$
$$s-s_o = t(s_1-s_o) \ ,$$

on considère les points z_o et z_1 définis par les relations suivantes,

$$z-z_1 = (1-t)(s_o-s_1)\cos[\text{Arg } z + \text{Arg}(s_o-s_1)] \exp[i \text{ Arg } z]$$

$$z-z_o = -t(s_o-s_1)\cos[\text{Arg } z + \text{Arg}(s_o-s_1)] \exp[i \text{ Arg } z] \quad ;$$

on a donc $z = tz_1 + (1-t)z_o$.

Le cas $L_{*,s}(\{z\}) = -\infty$ implique trivialement

$$|z| - L_{*,s}(\{z\}) > t\rho_{s_1} + (1-t)\rho_{s_o} \ .$$

On considère le cas $L_{*,s}(\{z\}) \geq 0$. On a :

$$L_{*,s}(\{z\}) = L_{*,s_1}(\{z_1\}) = L_{*,s_o}(\{z_o\})$$

avec, en outre, $\text{Arg } z = \text{Arg } z_1 = \text{Arg } z_o$,

et donc :

$$|z| = t|z_1| + (1-t)|z_o| \geq t[\rho_{s_1} + L_{*,s_1}(\{z_1\})] + (1-t)[\rho_{s_o} + L_{*,s_o}(\{z_o\})]$$

$$|z| - L_{*,s}(\{z\}) \geq t\rho_{s_1} + (1-t)\rho_{s_o}$$

or z étant arbitraire sur $\mathbb{C} - \{0\}$ et t sur $[0,1]$, on a donc :

$$\rho_s = \text{Min}\{|z|-L_{*,s}(\{z\}) \mid z \in \mathbb{C}-\{0\}\} \geq t\rho_{s_1} + (1-t)\rho_{s_o} \ .$$

Remarques.-

1) De la proposition précédente résulte :

$$\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \ \{\Delta_\alpha = \phi \ \vee \ \Delta_\alpha \ (\neq \phi) \text{ est convexe}\} \ .$$

2) La proposition précédente est encore vraie si dans la définition de ρ_s on s'affranchit de la condition $L < +\infty$.

Proposition IV.16.

L'implication suivante est vraie :

$$\exists_{\alpha\in\mathbb{R}_+} (\Delta_\alpha \neq \phi \wedge \Delta_\alpha \neq \mathbb{C}) \Rightarrow \forall_{s\in\Delta_\alpha} \left| (\rho_s - \alpha \text{ est la distance euclidienne du point } s \text{ à la frontière de } \Delta_\alpha) \right. .$$

On sait que s'il existe $s_o \in D_{*,o}$ tel que $\rho_{s_o} = +\infty$, on a :

$$\forall_{s\in\mathbb{C}} \quad d_*(s) = +\infty$$

qui implique

$$\forall_{s\in\mathbb{C}} \quad \{s\in D_{*,o} \wedge \rho_s = +\infty\}$$

et donc

$$\forall_{\alpha\in\mathbb{R}} \Delta_\alpha = \mathbb{C} .$$

On remarquera que la condition "il existe s_o tel que $\rho_{s_o} = -\infty$ " ne peut être réalisée que si l'on s'affranchit dans la définition de ρ_s de la condition L fini ; dans ce cas alors

$$\exists_{s_o\in\mathbb{C}} \rho_{s_o} = -\infty \Rightarrow \exists_{z_o\in\mathbb{C}} L_{*,s_o}(\{z_o\}) = +\infty \vee \exists_{(z_n)\subset\mathbb{C}} \lim L_{*,s_o}(\{z_n\}) = +\infty .$$

En définitive :

$$\exists_{\alpha\in\mathbb{R}} \Delta_\alpha \neq \phi \Rightarrow \exists_{s_o} s_o \in D_{*,o} \wedge \rho_{s_o} > \alpha$$

et en outre $\Delta_\alpha \neq \mathbb{C} \Rightarrow \rho_{s_o} < +\infty$.

Or $\rho_{s_o} < +\infty \Rightarrow \forall_{s\in\mathbb{C}} \rho_s < +\infty$,

ainsi

$$\exists_{\alpha\in\mathbb{R}} (\Delta_\alpha \neq \phi \wedge \Delta_\alpha \neq \mathbb{C}) \Rightarrow \forall_{s\in\mathbb{C}} \rho_s \in \mathbb{R} .$$

Pour la démonstration de la validité de l'implication, on suppose maintenant qu'il existe un certain $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\Delta_\alpha \neq \phi$ et soit un point $s \in \Delta_\alpha$.
On a :

$$\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad |z| - L_{*,s}(\{z\}) \geq \rho_s > 0$$

et donc

$$\forall_{z\in d_{o,\rho_s}} \quad L_{*,s}(\{z\}) = -\infty \quad ,$$

(où d_{o,ρ_s} désigne le disque ouvert de centre 0 et de rayon ρ_s) , d'où $d_*(s) \geq \rho_s$.

On considère un point $s' \neq s$ appartenant au disque ouvert de centre s et de rayon $\rho_s - \alpha$. On a donc :

$$d_*(s') \geq d_*(s) - |s-s'| \geq \rho_s - |s-s'| > \alpha \geq 0 \ ,$$

d'où $s' \in D_{*,o}$.

Soit un point $z' \in \mathbb{C}$. Si $L_{*,s'}(\{z'\}) = -\infty$ on a : $|z'| - L_{*,s'}(\{z'\}) > \alpha$. Si $L_{*,s'}(\{z'\}) \geq 0$ on a nécessairement $z' \in \mathbb{C} - \{0\}$ Or on a, comme on sait :

$$\forall_z \left\{ z-z' = |s-s'|\cos[\text{Arg } z' + \text{Arg}(s-s')] \exp(i \text{ Arg } z') \Rightarrow L_{*,s}(\{z\}) = L_{*,s'}(\{z'\}) \right.$$

et donc

$$|z| \geq \rho_s \ .$$

D'où

$$L_{*,s'}(\{z'\}) = L_{*,s}(\{z\}) \leq |z| - \rho_s < |z| - |s-s'| - \alpha \leq |z'| - \alpha$$

et

$$\alpha < |z'| - L_{*,s'}(\{z'\}) \Rightarrow \rho_{s'} > \alpha$$

(puisque l'application $\mathbb{C} \ni z' \mapsto |z'| - L_{*,s'}(\{z'\})$ admet un minimum sur $\mathbb{C}$).

Ainsi $s' \in \Delta_\alpha$ et, comme s' est arbitraire dans le disque de centre s et de rayon $\rho_s - \alpha$, ce disque appartient à Δ_α .

On considère maintenant une constante k telle que $k > \rho_s - \alpha$. On a,

$$\exists_{z_o \in \mathbb{C}-\{0\}} \quad |z_o| - L_{*,s}(\{z_o\}) < k+\alpha \ .$$

On considère le point $s' \in \mathbb{C}$ défini par la relation

$$s-s' = k \exp[-i \text{ Arg } z_o] \ .$$

Si $d_*(s') \leq 0$, on a $s' \notin D_{*,o}$ et donc $s' \notin \Delta_\alpha$.
Si $d_*(s') > 0$, on considère le point $z' \in \mathbb{C}-\{0\}$ défini par la relation

$$z_o - z' = k \exp(i \operatorname{Arg} z_o) .$$

Posant $m_o = |z_o| - L_{*,s}(\{z_o\})$, on sait qu'alors on a :

$$L_{*,s'}(\{z'\}) = L_{*,s}(\{z_o\}) = |z_o| - m_o > |z_o| - k - \alpha ,$$

et que $\operatorname{Arg} z' = \operatorname{Arg} z_o$.

Ainsi

$$z' = (|z_o| - k)\exp(i \operatorname{Arg} z_o) \Rightarrow |z'| = |z_o| - k$$

et

$$L_{*,s'}(\{z'\}) > |z'| - \alpha ,$$

d'où en définitive : $\rho_{s'} < \alpha$, et donc $s' \notin \Delta_\alpha$.

Remarque.-

Si $\exists_{\alpha_o} \Delta_{\alpha_o} \neq \phi$, on a alors :

$\forall_{\alpha \geq \alpha_o}$ [l'application $s \mapsto \rho_s$ est lipschitzienne de la forme, dans l'ouvert D_α

$$\forall_{(s,s')} (\rho_s - \rho_{s'}) \leq |s - s'|] .$$

Proposition IV.17.

On a ($\bar{\Delta}_\alpha$ désignant l'adhérence de Δ_α)

$$s \notin \bar{\Delta}_\alpha \Rightarrow (s \notin D_{*,o}) \vee (s \in D_{*,o} \wedge \rho_s < \alpha) .$$

En utilisant la concavité de la restriction de $s \mapsto \rho_s$ à $D_{*,o}$, on prouve que $\bar{\Delta}_\alpha \supset \{s \in D_{*,o} | \rho_s \geq \alpha\}$.

Proposition IV.18.

Si $D_{*,o} - \bar{\Delta}_\alpha \neq \phi$, on a :

$$\forall_s [s \in D_{*,o} - \bar{\Delta}_\alpha \Rightarrow d_{s,\alpha-\rho_s} \subset \mathbb{C} - \Delta_\alpha]$$

(où $d_{s,\alpha-\rho_s}$ est le disque ouvert de centre s et de rayon égal à $\alpha - \rho_s$) .

On a : $D_{*,o} - \bar{\Delta}_\alpha = D_{*,o} \cap \complement \bar{\Delta}_\alpha$ est un ouvert.

Si $D_{*,o} - \bar{\Delta}_\alpha \neq \phi$, on considère un point quelconque s de cet ensemble, et soit s' tel que $|s-s'| < \alpha-\rho_s$ ($\equiv s' \in d_{s,\alpha-\rho_s}$) . Or

$$\exists_{\beta\in\mathbb{R}} [\rho_s > \beta \wedge \rho_{s'} > \beta]$$

puisque la condition $L < +\infty$ intervenant dans la définition de ρ_s (et $\rho_{s'}$) implique $\rho_s > -\infty$ (et $\rho_{s'} > -\infty$) , et donc s et s' appartiennent à Δ_β qui est donc $\neq \phi$.

E étant une partie quelconque stricte de $\mathbb{C}$, il est trivial que l'application

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto \operatorname{dist}(s,E)$$

est lipschitzienne de la forme

$$\forall_{(s,s')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}} \quad |\operatorname{dist}(s,E) - \operatorname{dist}(s',E)| \leq |s-s'| \ .$$

Ainsi l'application $\Delta_\beta \ni s \mapsto \rho_s - \beta$ est lipschitzienne de la forme

$$\forall_{(s,s')\in\Delta_\beta\times\Delta_\beta} \quad |\rho_s - \rho_{s'}| \leq |s-s'|$$

sur Δ_β .

Pour le couple (s,s') choisi plus haut, on a donc :

$$\rho_{s'} \leq \rho_s + |s-s'| < \alpha \Rightarrow s' \notin \Delta_\alpha$$

et

$$d_{s,\alpha-\rho_s} \subset \mathbb{C} - \Delta_\alpha \ .$$

Proposition IV.19.

On a : $\exists_{s\in D_{*,o}} \rho_s = +\infty \Rightarrow \{+\infty\}$ est l'ensemble image de l'application $\mathbb{C} \ni s \to \rho_s$.

Cette proposition exprime un résultat mentionné plus haut.

Proposition IV.20.

Si l'ouvert $\Delta_o \neq \phi$ et si $L \in \mathbb{R}_+$, l'élément dirichlétien $\{f\}$ converge absolument et uniformément sur toute partie compacte de Δ_o .

Soit un point quelconque s de Δ_o . Il suffit de prouver la propriété sur un voisinage de ce point.

Si $d_*(s) > L$, le point s appartient à l'ouvert $D_{*,L}$. On sait qu'alors $\{f\}$ converge absolument et uniformément sur un voisinage convenable de ce point.

Soit maintenant $d_*(s) \leq L$. Puisque $\Delta_o \subset D_{*,o}$ on a $d_*(s) > 0$. On considère $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et on pose

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid d_*(s)/2 \leq |z| \leq L+\alpha\}$$

($\mathcal{A}$ est un anneau compact de centre $z = 0$) .

$$\text{Or } s \in \Delta_o \Rightarrow \rho_s > 0 \Rightarrow \forall_{z \in \mathbb{C}} \; |z| - L_{*,s}(\{z\}) > 0 ,$$

où $L_{*,s}(\{z\}) \leq L$,

et $\forall_{z \in \mathcal{A}} \; \exists_{\varepsilon'(=\varepsilon'_z) \in \mathbb{R}_+^*} \; 2\varepsilon' < [|z| - L_{*,s}(\{z\})]$;

donc on a (avec $L_{*,s}(\{z\}) \neq -\infty$)

$$\exists_{\varepsilon \in]0, \varepsilon'_z[} \; L_s(\{z\}_\varepsilon) \leq L_{*,s}(\{z\}) + \varepsilon'_z < |z| - \varepsilon'_z < |z| - \varepsilon ,$$

d'où

$$L_s(\{z\}_\varepsilon) < |z| - \varepsilon \leq \mathrm{Inf}\{d(n,s) \mid n \in \mathbb{N}^*_{s,\{z\}_\varepsilon}\} .$$

On remarquera qu'on est, pour l'élément dirichlétien $\{f\}_{\{z\}_\varepsilon}$, ramené au cas antérieur. Ainsi il existe un voisinage du point s sur lequel cet élément converge absolument et uniformément. A chaque point z de $\mathcal{A}$, on associe comme ci-dessus un voisinage (par exemple, un disque ouvert $d_{z,\varepsilon}$, ε dépendant de z). La famille de ces disques est un recouvrement ouvert du compact $\mathcal{A}$. On peut donc extraire de cette famille un ensemble fini de p disques ouverts d_{z_j,ε_j} $j \in \{1,2,\ldots,p\}$, constituant un recouvrement ouvert de $\mathcal{A}$ et trouver p ensembles E_j , $j \in \{1,2,\ldots,p\}$ satisfaisant à la condition $E_j \subset d_{z_j,\varepsilon_j}$ et constituant une partition de $\mathcal{A}$. On pose, en outre :

$$E_o = \{z \in \mathbb{C} \mid 2|z| < d_*(s)\}$$

$$E_{p+1} = \{z\in\mathbb{C} \mid |z| > L+\alpha\}$$

L'ensemble $\mathbb{N}^*_{s,E_o}$ est fini ou vide. Si $\mathbb{N}^*_{s,E_o} \neq \phi$, l'élément $\{f\}_{E_o}$ se réduit à un polynôme exponentiel. Pour chaque $j \in \{1,2,\ldots,p+1\}$, $\{f\}_{E_j}$ s'il ne se réduit pas à un polynôme exponentiel (sans exclure le cas où tous les coefficients sont nuls) converge absolument et uniformément sur un voisinage du point s . Donc il existe un voisinage de ce point sur lequel $\{f\}_{\mathbb{C}}$ $(= \{f\})$ converge absolument et uniformément.

Proposition IV.21.

$\{f\}$ ne converge absolument en aucun point de $\mathbb{C} - \bar{\Delta}_o$.

On montre facilement que $\bar{\Delta}_o = \{s\in\bar{D}_{*,o} \mid \rho_s \geq 0\}$ et on a :

$$\forall_{s\in\mathbb{C}-\bar{\Delta}_o} \{(s\notin\bar{D}_{*,o}) \vee (s\in\bar{D}_{*,o} \wedge \rho_s < 0)\} .$$

on sait que : $s \notin \bar{D}_{*,o} \Rightarrow \{f\}$ ne converge pas au point s .

En outre,

$$\{s\in\bar{D}_{*,o} \wedge \rho_s < 0\} \Rightarrow \exists_{z\in\mathbb{C}} \; L_{*,s}(\{z\}) > |z|$$

et donc

$$\forall_{\epsilon\in]0,L_{*,s}(\{z\})-|z|[} \; L_s(\{z\}_\epsilon) \geq L_{*,s}(\{z\}) > |z| + \epsilon$$

d'où

$$L_s(\{z\}_\epsilon) > |z|+\epsilon \geq \limsup\{d(n,s) \mid n\in\mathbb{N}^*_{s,\{z\}_\epsilon}\} .$$

On sait qu'alors l'élément dirichlétien $\{f\}_{\{z\}_\epsilon}$ ne converge pas absolument au point s . Il en est donc de même pour l'élément $\{f\}$.

Proposition IV.22.

Si $L \in \mathbb{R}_+$, Δ_o est l'ouvert maximal de convergence absolue de l'élément dirichlétien $\{f\}$.

La proposition résulte trivialement de la propriété : $\Delta_o = \mathrm{Int}(\bar{\Delta}_o)$.

Remarque.-

Si $L = +\infty$, deux cas sont possibles :

1) $\underset{(s,z)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}}{\exists} \quad L_{*,s}(\{z\}) = +\infty$.

Mais alors

$$\underset{s\in\mathbb{C}}{\forall} \quad \underset{z\in\mathbb{C}}{\exists} \quad L_{*,s}(\{z\}) = +\infty$$

et donc $\{f\}$ diverge absolument sur $\mathbb{C}$.

2) $\underset{(s,z)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}}{\forall} \quad L_{*,s}(\{z\}) < +\infty$.

Si dans la définition de ρ_s (et donc de Δ_o) on s'affranchit de la condition, $L < +\infty$, on remarquera qu'alors dans le cas (1) on a $\Delta_o = \phi$ (or puisque $\mathbb{C} - \overline{\Delta}_o = \mathbb{C}$, on retrouve dans ce cas l'extension énoncée ci-dessus sur la divergence absolue de $\{f\}$).

Dans le cas (2) l'ouvert Δ_o n'est plus nécessairement l'ouvert maximal de convergence absolue de $\{f\}$ mais le contient.

Dans le chapitre suivant, on convient de désigner par Δ_o l'ouvert maximal de convergence absolue de $\{f\}$ et par ρ_s la distance du point s de Δ_o à $\mathbb{C} - \Delta_o$.

CHAPITRE V

Les propositions de ce chapitre sont destinées à préciser la forme de $D_{*,o}$ et celle de Δ_o , formes liées aux arguments des exposants λ_n de $\{f\}$. On étudie en premier lieu des propriétés ne nécessitant aucune condition sur L , puis ensuite des propriétés plus précises dans le cas où L est fini.

Proposition V.1.

Sous les conditions : il existe un point s_o de $D_{*,o}$ et un nombre β de $[0,\pi/2[$ tels que β et $-\beta$ sont respectivement le supremum et l'infimum de l'ensemble

$$\{\mathrm{Arg}\ z \mid z\in\mathbb{C}-\{0\} \wedge L_{*,s_o}(\{z\}) \geq 0\} \ ,$$

et désignant par α une constante de l'intervalle $]-\pi,\pi]$ et par E_{α,s_o} la demi-droite suivante de $\mathbb{C}$:

$$\{s\in\mathbb{C}-\{s_o\} \mid \mathrm{Arg}(s-s_o) = \alpha\} \ ,$$

on a :

$$E_{\alpha,s_o} \subset D_{*,o} \Leftrightarrow \alpha \in [\beta-\pi/2, \pi/2-\beta] \ .$$

On considère successivement les trois cas :

1) $|\alpha| \in [0,\pi/2-\beta[$. Soit un point s de E_{α,s_o} ; on pose :

$$\mathbb{N}_1 = \{n\in\mathbb{N}^* \mid d(n,s_o) \geq d_*(s_o) + |s-s_o|\} \ .$$

On a : $\forall_{n\in\mathbb{N}^*}\ d(n,s) - d(n,s_o) = |s-s_o|\cos[\mathrm{Arg}\ \lambda_n+\alpha]$ et

$\forall_{n\in\mathbb{N}_1}\ d(n,s) \geq d(n,s_o) - |s-s_o| \geq d_*(s_o)$.

Or $\mathbb{N}^*-\mathbb{N}_1$ étant un ensemble infini puisque $s \in E_{\alpha,s_o} \Rightarrow |s-s_o| > 0$,

on a :

$$\forall_{\varepsilon\in\,]0,\pi/2-\beta-|\alpha|[}\ \exists_{\rho\in\mathbb{N}^*-\mathbb{N}_1}\ \forall_{n(>p)\in\mathbb{N}^*-\mathbb{N}_1}\quad |\mathrm{Arg}\ \lambda_n| < \beta+\varepsilon\ ,$$

et donc pour les indices n considérés

$$|\mathrm{Arg}\ \lambda_n+\alpha| \le |\mathrm{Arg}\ \lambda_n| + |\alpha| < \beta+|\alpha|+\varepsilon < \pi/2\ ,$$

$$d(n,s) > d(n,s_o)\ ,$$

d'où

$$d_*(s) \ge d_*(s_o) \quad (\Rightarrow\ s \in D_{*,o})\ ,$$

en définitive, on a :

$$\forall_s \{s\in E_{\alpha,s_o} \Rightarrow s\in D_{*,o}\} \quad (\Leftrightarrow\ E_{\alpha,s_o} \subset D_{*,o})\ .$$

2) $|\alpha| = \pi/2-\beta$.

Puisque $D_{*,o}$ est un ouvert (non vide), il existe un point s_1 (distinct de s_o) de $D_{*,o}-E_{\alpha,s_o}$ tel que le secteur suivant :

$$\Sigma_{s_1} = \{s\in\mathbb{C}-\{s_1\} \mid \mathrm{Arg}(s-s_1) \in\ ]\beta-\pi/2,\pi/2-\beta[\}$$

contient la demi-droite $E_{\alpha,s_o} \cup \{s_o\}$. On considère un point $s \in E_{\alpha,s_o}$ et la demi-droite

$$\mathcal{E}_{s_1,s} = \{s'\in\mathbb{C}-\{s_1\} \mid \mathrm{Arg}(s'-s_1) = \mathrm{Arg}(s-s_1)\}\ .$$

Eu égard au cas (1) , on a :

$$\mathcal{E}_{s_1,s} \subset D_{*,o}$$

et donc $\forall_{s\in E_{\alpha,s_o}} \mathcal{E}_{s_1,s} \subset D_{*,o}$ $(\Rightarrow\ E_{\alpha,s_o} \subset D_{*,o})$

3) $\alpha \in\ ]-\pi,\pi] - [\beta-\pi/2,\pi/2-\beta]$.

Pour fixer les idées, on suppose que $\alpha \in\ ]\pi/2-\beta,\pi]$ et on remarquera que le raisonnement qui suit est immédiatement transposable au cas $\alpha \in\ ]-\pi,\beta-\pi/2[$. On a :

$$\forall_{\varepsilon\in\,]0,\mathrm{Inf}\{(\alpha-\pi/2+\beta),(\pi/2-\beta)\}[}\ \exists_{(n_i)\ (\text{infinie})} \subset \mathbb{N}^*\ :$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{la suite infinie } d(n_i,s_o)) \text{ est bornée et telle que :} \\ \text{Arg } \lambda_{n_i} \in]\beta-\varepsilon,\beta+\varepsilon[\end{array}\right\}$$

et donc

$$\pi/2 < \beta-\varepsilon+\alpha < \text{Arg } \lambda_{n_i}+\alpha < \beta+\varepsilon+\alpha < 3\pi/2$$

$$\cos(\text{Arg } \lambda_{n_i}+\alpha) < 0 \quad ,$$

or, de la relation :

$$\forall_{s\in E_{\alpha,s_o}} \quad d(n_i,s) = d(n_i,s_o) + |s-s_o| \cos(\text{Arg } \lambda_{n_i}+\alpha) \quad ,$$

et puisque la suite $(d(n_i,s_o))$ est bornée, on déduit :

$$\exists_{\mu\in\mathbb{R}_+^*} \quad \forall_{s\in\{s\in E_{\alpha,s_o} \,|\, |s-s_o|\geq\mu\}} \quad d(n_i,s) \leq 0$$

et donc $d_*(s) \leq 0$. L'ensemble $\{s\in E_{\alpha,s_o} \,|\, |s-s_o| \geq \mu\}$ n'appartient pas à $D_{*,o}$.

En définitive, α étant une constante de $]-\pi,\pi]$: (1) et (2) prouvent que $\alpha \in [\beta-\pi/2,\pi/2-\beta] \Rightarrow E_{\alpha,s_o} \subset D_{*,o}$, et (3) prouve que $\alpha \notin [\beta-\pi/2,\pi/2-\beta] \Rightarrow E_{\alpha,s_o} \not\subset D_{*,o}$ (ou -ce qui est équivalent- $E_{\alpha,s_o} \subset D_{*,o} \Rightarrow \alpha \in [\beta-\pi/2,\pi/2-\beta]$) .

Rappelant que, dans tout ce chapitre, Δ_o désigne l'ouvert maximal de convergence absolue de $\{f\}$, on énonce :

Proposition V.2.

Sous les conditions : il existe un nombre $\beta' \in [0,\pi/2[$ tel que β' et $-\beta'$ sont respectivement le supremum et l'infimum de l'ensemble $\{\text{Arg } \lambda_n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$, et désignant, comme dans la proposition V.1, par E_{α,s_o} la demi-droite $\{s\in\mathbb{C}-\{s_o\} \mid \text{Arg}(s-s_o) = \alpha\}$, où la constante α appartient à $]-\pi,\pi]$ et où ici s_o est un point de Δ_o (supposé $\neq \emptyset$) , on a :

$$\forall_\alpha \{\alpha\in[\beta'-\pi/2,\pi/2-\beta'] \Rightarrow E_{\alpha,s_o} \subset \Delta_o\} \; .$$

On considère successivement les deux cas :

1) $|\alpha| \in [0,\pi/2-\beta'[$.

On a

$$\forall_{n\in\mathbb{N}^*} \quad \forall_{s\in E_{\alpha,s_o}} \quad d(n,s) = d(n,s_o) + |s-s_o|\cos(\operatorname{Arg}\lambda_n+\alpha)$$

avec

$$|\operatorname{Arg}\lambda_n+\alpha| \leq |\operatorname{Arg}\lambda_n|+|\alpha| < \beta'+\pi/2-\beta' = \pi/2 ,$$

et donc

$$\forall_{n\in\mathbb{N}^*} \quad \forall_{s\in E_{\alpha,s_o}} \quad d(n,s) \geq d(n,s_o) \ ;$$

d'où $\forall_{s\in E_{\alpha,s_o}} \quad \sum_1^\infty |a_n \exp(-s\lambda_n)| = \sum_1^\infty \exp[-|\lambda_n|d(n,s)]$ converge ;

ainsi $\forall_{s\in E_{\alpha,s_o}} \quad s \in \Delta_o \quad (\Leftrightarrow E_{\alpha,s_o} \subset \Delta_o)$.

2) $|\alpha| = \pi/2-\beta'$.

Puisque Δ_o est un ouvert $\neq \emptyset$, il existe un point s_1 $(\neq s_o)$ de $\Delta_o - E_{\alpha,s_o}$ tel que le secteur suivant :

$$\sum_{s_1} = \{s\in\mathbb{C}-\{s_1\} \mid \operatorname{Arg}(s-s_1) \in]\beta'-\pi/2,\pi/2-\beta'[\}$$

contient la demi-droite $E_{\alpha,s_o} \cup \{s_o\}$.

Or, eu égard au cas (1), on a : $\sum_{s_1} \subset \Delta_o$, et donc $E_{\alpha,s_o} \subset \Delta_o$.

Remarque.

On constate très facilement que l'on peut énoncer une proposition un peu plus générale que la précédente en substituant dans celle-ci les notions de limites supérieure et inférieure de l'ensemble $\{\operatorname{Arg}\lambda_n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$ respectivement à celles de supremum et d'infimum, de cet ensemble.

Une rotation des axes permet d'énoncer la proposition suivante :

Proposition V.3.

Sous les conditions : β'_1 et β'_2 désignant respectivement l'infimum et le supremum de l'ensemble $\{\text{Arg } \lambda_n \,|\, n\in\mathbb{N}^*\}$ tels que $\beta'_2-\beta'_1 < \pi$, et si s_o est un point de Δ_o (supposé $\neq \phi$) , on a

$$\forall_{\alpha} \ \{\alpha\in[-\pi/2-\beta'_1,\pi/2-\beta'_2] \Rightarrow E_{\alpha,s_o} \subset \Delta_o\} \ ,$$

(où E_{α,s_o} est la demi-droite introduite dans les propositions antérieures).

Proposition V.4.

Sous les conditions : il existe une constante $\beta \in]0,\pi/2[$ telle que

$$\forall_{n\in\mathbb{N}^*} \ \text{Arg } \lambda_n \notin]-\beta,\beta[\ ,$$

et désignant par s_o et s_1 deux points de Δ_o (supposé $\neq \phi$) satisfaisant à : $\Re s_o = \Re s_1 \wedge \Im s_1 < \Im s_o$, et par $\mathcal{T}$ le triangle :

$$\{s\in\mathbb{C}-\{s_o,s_1\} \mid \text{Arg}(s-s_o) \in [-\beta-\pi/2,-\pi/2] \wedge \text{Arg}(s-s_1) \in [\pi/2,\pi/2+\beta]\}$$

on a :

$$\mathcal{T} \subset \Delta_o \ .$$

On désigne par $\{f^o\}$ l'élément dirichlétien suivant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^o \exp(-s\lambda_n) \ , \quad \text{où} \quad \begin{cases} a_n^o = a_n \Leftrightarrow \text{Arg } \lambda_n \in [\beta,\pi] \\ a_n^o = 0 \ \Leftrightarrow \text{Arg } \lambda_n \notin [\beta,\pi] \ , \end{cases}$$

et par $\{f^1\}$ le suivant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 \exp(-s\lambda_n) \ , \text{ où} \quad \begin{cases} a_n^1 = a_n \Leftrightarrow \text{Arg } \lambda_n \in]-\pi,-\beta] \\ a_n^1 = 0 \ \Leftrightarrow \text{Arg } \lambda_n \notin]-\pi,-\beta] \ , \end{cases}$$

et par Δ_o^o et Δ_o^1 respectivement les ouverts maximaux de convergence absolue de $\{f^o\}$ et $\{f^1\}$. Il est trivial que $\Delta_o = \Delta_o^o \cap \Delta_o^1$; on a donc :

$$\forall_{s\in\Delta_o} \ \{f\}_s = \{f^o\}_s + \{f^1\}_s$$

(où $\{f\}_s$ désigne la valeur de $\{f\}$ au point s , et l'analogue pour $\{f^o\}$ et $\{f^1\}$) .

Remarquant que (eu égard à la proposition V.3) :

$$\forall_s \{\mathrm{Arg}(s-s_o) \in [-\beta-\pi/2,-\pi/2] \Rightarrow s \in \Delta_o^o\}$$

et

$$\forall_s \{\mathrm{Arg}(s-s_1) \in [\pi/2,\pi/2+\beta] \Rightarrow s\in\Delta_o^1\} \quad ,$$

on a :

$$\forall_s \{s\in\mathcal{J} \Rightarrow s\in\Delta_o^o\cap\Delta_o^1 = \Delta_o\} \quad (\Leftrightarrow \mathcal{J} \subset \Delta_o) \ .$$

Proposition V.5.

Sous les conditions :

$\Delta_o \subset \{s\in\mathbb{C} \mid \Re s > 0\}$,

Δ_o est tangent au point $z = 0$ à l'axe imaginaire,

β désignant une constante appartenant à $]0,\pi/2[$ et posant :

$$a'_n = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Arg}\ \lambda_n \in [-\beta,\beta]$$

$$a'_n = a_n \Leftrightarrow \mathrm{Arg}\ \lambda_n \notin [-\beta,\beta] \ ,$$

$$\{f_\beta\} : \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \exp(-s\lambda_n)$$

il existe alors un voisinage (non vide) du point $s = 0$ sur lequel $\{f_\beta\}$ converge absolument.

Cette propriété résulte immédiatement de la précédente. Utilisant à nouveau le vocabulaire de la géométrie élémentaire, on énonce :

Proposition V.6.

Sous les conditions :

$\mathrm{Fr}(\Delta_o)$ admet deux directions orientées asymptotiques faisant les angles α et $-\alpha$ avec le demi-axe réel positif, avec $\alpha \in [0,\pi/2]$, alors :

$$\forall_{\alpha'\in]-\pi/2,\alpha[} \{f_{[\pi/2-\alpha']}\}$$

converge absolument sur $\mathbb{C}$ (où $\{f_{[\pi/2-\alpha']}\}$ est défini, à partir de $\{f\}$, comme $\{f_\beta\}$ dans la proposition antérieure, avec $\beta = \pi/2-\alpha'$) .

Par convention, dire que $\mathrm{Fr}(\Delta_o)$ admet deux directions orientées asymptotiques faisant les angles α et $-\alpha$ (avec $\alpha \in [0,\pi/2]$) avec le demi-axe

réel positif, est équivalent à dire :

$$\forall_{s_o \in \Delta_o} \{\Delta_o \supset \{s \in \mathbb{C} - \{s_o\} \mid \mathrm{Arg}\ (s-s_o) = \varphi\} \Leftrightarrow \varphi \in [-\alpha, \alpha]\}$$

si $\alpha = \pi/2$, Δ_o est alors un demi-plan dont la droite fontière est parallèle à l'arc imaginaire ,

si $\alpha = 0$, le demi-axe réel positif est alors la seule direction orientée asymptotique.

Soit une constante α' appartenant à l'intervalle $]-\pi/2, \alpha[$. On considère un point s_o de Δ_o et soit une constante β appartenant au complémentaire de $]\alpha'-\pi/2, \pi/2-\alpha'[$ par rapport à $]-\pi, \pi]$. Pour fixer les idées, on choisit $\beta \in [\pi/2-\alpha', \pi]$. Le raisonnement qui suit est transposable au cas $\beta \in]-\pi, \alpha'-\pi/2]$. On considère successivement les deux cas :

1) $\beta \in]\pi/2, \pi]$ (cas nécessairement réalisé par le choix antérieur de β si α' est strictement négatif. On a (eu égard à la proposition V.3) :

$$\forall_{\beta \in]\pi/2, \pi]} \quad \exists_{\eta (= \eta_\beta) \in \mathbb{R}_+^*} \quad \left\{ \begin{array}{l} \{f^\beta\} \text{ converge absolument sur un voisinage angulaire de la demi-droite} \\ \qquad \{s \in \mathbb{C} - \{s_o\} \mid \mathrm{Arg}\ (s-s_o) = \pi\} \end{array} \right\}$$

où $\{f^\beta\}$ désigne l'élément dirichlétien suivant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp(-s\lambda_n) \text{ , où } \left\{ \begin{array}{l} b_n = a_n \Leftrightarrow \mathrm{Arg}\ \lambda_n \in]\beta-\eta, \beta+\eta[\\ \\ b_n = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Arg}\ \lambda_n \notin]\beta-\eta, \beta+\eta[\end{array} \right. .$$

Or, il est trivial que $\{f^\beta\}$ converge absolument sur Δ_o et donc en particulier sur la demi-droite $\{s \in \mathbb{C} - \{s_o\} \mid \mathrm{Arg}(s-s_o) = 0\}$. Le domaine maximal de convergence absolue de $\{f^\beta\}$ étant convexe, $\{f^\beta\}$ converge donc absolument sur $\mathbb{C}$.

2) $\beta \in [\pi/2-\alpha', \pi/2]$. (Cas qui ne peut être réalisé que si α' est positif, et donc si α est strictement positif). On a :

$$\forall_{\beta \in [\pi/2-\alpha', \pi/2]} \quad \forall_{\eta \in]0, \alpha-\alpha'[} \quad \left\{ \begin{array}{l} \{f^\beta\} \text{ converge absolument sur} \\ \\ \{s \in \mathbb{C} - \{s_o\} \mid \mathrm{Arg}(s-s_o) + \beta \leq [0, \pi/2-\eta]\} \end{array} \right.$$

(où $\{f^\beta\}$ est défini comme ci-dessus mais avec les valeurs de β et η assujetties aux conditions qui précèdent).

Or $\eta < \alpha-\alpha' \Rightarrow \eta < \alpha+\beta-\pi/2$ $(\Leftrightarrow \alpha > \pi/2+\eta-\beta)$ et

$$\beta \in [\pi/2-\alpha',\pi/2] \Rightarrow \beta \in [0,\pi/2] \Rightarrow \eta < \alpha-\alpha' \leq \alpha \leq \alpha+\pi/2-\beta ,$$

ainsi

$$-\alpha < \pi/2 - \beta - \eta .$$

On a donc :

$$[-\beta+\eta-\pi/2,\pi/2-\beta-\eta] \cap [-\alpha,\alpha] \neq \phi$$

et

$$[-\beta+\eta-\pi/2,\pi/2-\beta-\eta] \cup [-\alpha,\alpha] = [-\beta+\eta-\pi/2,\alpha] ;$$

Ce dernier intervalle est de longueur strictement supérieure à π . $\{f^\beta\}$ converge donc absolument sur $\mathbb{C}$.

En résumé, à chaque valeur β de l'intervalle $[\pi/2-\alpha',\pi]$ et (comme on l'a fait observer plus haut en transposant les raisonnements) à chaque β de l'intervalle $]-\pi,\alpha'-\pi/2]$, on peut associer une valeur η $(= \eta_\beta)$ telle que $\{f^\beta\}$ converge absolument sur $\mathbb{C}$. Remarquant que l'intervalle $]\pi,\alpha'-\pi/2+2\pi]$ est le translaté de l'intervalle $]-\pi,\alpha'-\pi/2]$ par une translation le long de l'axe réel et d'amplitude 2π , et que $\pi/2-\alpha'$ et $\alpha'-\pi/2+2\pi$ sont deux points symétriques par rapport au point π , il est alors trivial qu'à chaque β de l'intervalle $[\pi/2-\alpha',\alpha'\pi/2+2\pi]$ on peut associer une valeur η $(= \eta_\beta)$ telle que $\{f^\beta\}$ converge absolument sur $\mathbb{C}$. La famille des intervalles ouverts $]\beta-\eta_\beta,\beta+\eta_\beta[$ est un recouvrement ouvert du compact $[\pi/2-\alpha',\alpha'-\pi/2+2\pi]$. On peut donc extraire de cette famille un recouvrement ouvert fini de ce compact (soit p le nombre des éléments de la famille constituant ce recouvrement). Il est facile de voir comment on peut utiliser ce recouvrement fini pour déterminer une partition de $[\pi/2-\alpha',\alpha'-\pi/2+2\pi]$. A chaque élément du recouvrement fini est associé un élément de la partition auquel on associe un sous-élément dirichlétien de $\{f\}$; chacun d'eux est défini à partir de $\{f\}$ comme $\{f^\beta\}$ a été défini à partir de $\{f\}$. On note $\{f_1\}$, $\{f_2\}$,..., $\{f_p\}$ les sous-éléments dirichlétiens ainsi déterminés. Eu égard aux résultats obtenus ci-dessus, chacun d'eux converge absolument sur $\mathbb{C}$; donc $\{f_{[\pi/2-\alpha']}\}$ converge absolument sur $\mathbb{C}$.

Remarque.

Sous la condition : L fini, on peut affiner les propositions précédentes. Sous les formes qui suivent, certaines sont alors des conditions nécessaires et suffisantes.

Proposition V.7.

Sous les conditions :

L est fini et $\Delta_o \neq \phi$;

$$\exists_{s_o \in \Delta_o} \quad \exists_{\beta \in [0,\pi/2[} \quad \begin{cases} \beta \text{ et } -\beta \text{ sont respectivement le supremum et l'infimum de} \\ \text{l'ensemble : } \{\text{Arg } z \mid z \in \mathbb{C}-\{0\} \wedge L_{*,s_o}(\{z\}) \geq 0\} \end{cases}$$

on a :

$$E_{\alpha,s_o} \subset \Delta_o \Leftrightarrow \alpha \in [\beta-\pi/2, \pi/2-\beta]$$

(où E_{α,s_o} a la signification précisée dans certaines des propositions antérieures).

On considère les trois cas :

1) $|\alpha| \in [0, \pi/2-\beta[$.

On a (comme on sait puisque L est fini)

$$s_o \in \Delta_o \Rightarrow \rho_{s_o} > 0 \Rightarrow \forall_{z \in \mathbb{C}} \; |z| > L_{*,s_o}(\{z\})$$

et eu égard à la proposition V.1

$$\forall_{s \in E_{\alpha,s_o}} \; s \in D_{*,o} \quad \text{et donc} \quad \forall_{s \in E_{\alpha,s_o}} \; L_{*,s}(\{0\}) = -\infty \; .$$

Soient un point arbitraire z de $\mathbb{C}-\{0\}$ et un point arbitraire s de E_{α,s_o}.

Si $L_{*,s}(\{z\}) = -\infty$ on a $|z|-L_{*,s}(\{z\}) = +\infty$.

Si $L_{*,s}(\{z\}) \geq 0$ on a $\text{Arg } z \in [-\beta,\beta]$ et $(\text{Arg } z+\alpha) \in]-\pi/2,\pi/2[$. On considère alors un point z_o de $\mathbb{C}$ défini par la relation

$$z-z_o = |s-s_o| \cos[\text{Arg } z+\alpha] \exp[i \text{ Arg } z] \; .$$

On sait que

$$\text{Arg } z = \text{Arg } z_o$$

et que

$$L_{*,s}(\{z\}) = L_{*,s_o}(\{z_o\}) \geq 0 \; .$$

En outre, on a :

$$L_{*,s_o}(\{z_o\}) < |z_o| = |z| - |s-s_o|\cos[\text{Arg } z+\alpha] < |z| ,$$

et donc,

$$|z| - L_{*,s}(\{z\}) > |z_o| - L_{*,s_o}(\{z_o\}) \geq \rho_{s_o} > 0 \ ;$$

(d'où (puisque z est arbitraire sur $\mathbb{C}-\{0\}$ et que $L_{*,s}(\{0\}) = -\infty$)

$$\rho_s > 0 .$$

En définitive, on a :

$$\forall_\alpha \{\alpha\in]\beta-\pi/2,\pi/2-\beta[\Rightarrow \forall_s \{s\in E_{\alpha,s_o} \Rightarrow s\in\Delta_o\}\} .$$

2) $|\alpha| = \pi/2-\beta$.

Δ_o étant un ouvert non vide, il existe $s_1 \neq s_o \in \Delta_o$ tel que

$$E_{\alpha,s_o} \subset \{s\in\mathbb{C}-\{s_1\} \mid \text{Arg}(s-s_1) \in]\beta-\pi/2,\pi/2-\beta[\} .$$

Donc, eu égard au cas (1)

$$\forall_{s\in E_{\alpha,s_o}} \mathcal{E}_{s_1,s} = \{s'\in\mathbb{C}-\{s_1\} \mid \text{Arg}(s'-s_1) = \text{Arg}\ (s-s_1)\} \subset \Delta_o$$

et ainsi

$$E_{\alpha,s_o} \subset \Delta_o .$$

Réunissant les résultats obtenus en (1) et (2) , on a :

$$\forall_\alpha \{|\alpha| \in [0,\pi/2-\beta] \Rightarrow \forall_s \{s\in E_{\alpha,s_o} \Rightarrow s\in\Delta_o\}\} ;$$

ce résultat n'est autre que la condition suffisante contenue dans la proposition.

3) $\alpha \in]-\pi,\pi] - [\beta-\pi/2,\pi/2-\beta]$.

Eu égard à une proposition antérieure, on sait que E_{α,s_o} n'est pas contenue dans $D_{*,o}$ ni donc dans Δ_o . Ainsi

$$\forall_\alpha \{\alpha\in]-\pi,\pi]-[\beta-\pi/2,\pi/2-\beta] \Rightarrow E_{\alpha,s_o} \not\subset \Delta_o\}$$

ou -ce qui est équivalent- eu égard à la condition $\alpha \in]-\pi,\pi]$,

$$\forall_\alpha \{E_{\alpha,s_o} \subset \Delta_o \Rightarrow \alpha \in [\beta-\pi/2,\pi/2-\beta]\} .$$

Ce résultat n'est autre que la condition nécessaire contenue dans la proposition.

Utilisant une rotation des axes, on énonce la proposition suivante :

Proposition V.8.

Sous les conditions :

L est fini et $\Delta_o \neq \phi$

s_o étant un point de Δ_o et désignant par β_1 et β_2 respectivement l'infimum et le supremum de l'ensemble

$$\{\text{Arg } z \mid z\in\mathbb{C}-\{0\} \wedge L_{*,s_o}(\{z\}) \geq 0\} \ ,$$

on a $\beta_2-\beta_1 < \pi$,

alors :

$$E_{\alpha,s_o} \subset \Delta_o \Leftrightarrow \alpha \in [-\beta_1-\pi/2, \pi/2-\beta_2] \ .$$

Proposition V.9.

Sous les conditions :

L est fini et $\Delta_o \neq \phi$

$$\overset{\exists}{\beta\in]0,\pi/2[} \ \overset{\forall}{s\in D_{*,o}} \ \overset{\forall}{z\in\{\xi\in\mathbb{C}-\{0\} \mid \text{Arg } \xi\in]-\beta,\beta[\}} \ L_{*,s}(\{z\}) = -\infty$$

et désignant par s_o et s_1 deux points de Δ_o satisfaisant à :

$$\Re s_o = \Re s_1 \wedge \Im s_1 < \Im s_o \ ,$$

et par $\mathcal{T}$ le triangle :

$$\{s\in\mathbb{C}-\{s_o,s_1\} \mid \text{Arg}(s-s_o)\in]-\beta-\pi/2,-\pi/2[\wedge \text{Arg}(s-s_1) \in]\pi/2,\pi/2+\beta[\}$$

on a :

$$\mathcal{T} \subset \Delta_o \ .$$

On considère un nombre ϵ de l'intervalle $]0,\beta[$, et on pose :

$$E = \{z\in\mathbb{C}-\{0\} \mid \text{Arg } z \in]-\beta+\epsilon,\beta-\epsilon[\}$$

$$E_o = \{z\in\mathbb{C}-\{0\} \mid \text{Arg } z \in [\beta-\epsilon,\pi]\}$$

$$E_1 = \{z\in\mathbb{C}-\{0\} \mid \text{Arg } z \in]-\pi,-\beta+\epsilon]\} \ .$$

L'élément dirichlétien $\{f\}_E$ satisfait aux conditions :

$$\forall_{s\in D_{*,o}} \quad \forall_{z\in\mathbb{C}} \quad L_{*,s}(\{z\}) = -\infty \quad (\text{avec} \quad L < +\infty)$$

Eu égard à la proposition IV.13, l'élément $\{f\}_E$ converge absolument sur $\mathbb{C}$. On considère un point arbitraire s de $\mathcal{J}$; on a :

$$\mathrm{Arg}(s-s_o) \in \left]-\beta-\pi/2,-\pi/2\right[\ \wedge \ \mathrm{Arg}(s-s_1) \in \left]\pi/2,\pi/2+\beta\right[.$$

Eu égard à la proposition V.8, l'élément $\{f\}_{E_o}$ converge absolument au point s si $\mathrm{Arg}(s-s_1) \in [\pi/2,\pi/2+\beta-\varepsilon]$.

En choisissant $\varepsilon \in \left]0,\mathrm{Min}\{\beta,\mathrm{Arg}(s-s_o)+\pi/2+\beta,\pi/2+\beta-\mathrm{Arg}(s-s_1)\}\right[$ les éléments $\{f\}_E$, $\{f\}_{E_o}$, $\{f\}_{E_1}$ convergent absolument au point s , et donc $\{f\}$ converge absolument au point s . Puisque s est arbitraire dans $\mathcal{J}$, on a donc :

$$\mathcal{J} \subset \Delta_o .$$

Proposition V.10.

Sous les conditions :

Δ_o contient un intervalle $\left]0,\gamma\right[$ (non vide) du demi-axe réel positif.

$$\exists_{\beta\in[0,\pi/2[} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}^*} \quad |\mathrm{Arg}\ \lambda_n| \leq \beta .$$

Posant $T = \mathrm{Max}\{|\tau| \mid s = \sigma+i\tau \in \mathcal{K}\}$, où $\mathcal{K}$ est un compact de $\mathbb{C}$ et $S_n(s) = \sum_{p=1}^{n} a_p \exp(-s\lambda_p)$, on a :

$$\forall_{\varepsilon\in\left]0,\gamma\right[} \quad \exists_{n(=n_\varepsilon)\in\mathbb{N}^*} \quad \forall_{n\geq n_\varepsilon} \quad \forall_{s\in\mathcal{K}} \quad \begin{cases} \sigma\leq 0 \Rightarrow |S_n(s)| \leq \exp[(-\sigma+\varepsilon+T\sin\beta)|\lambda_n|] \\ \sigma>0 \Rightarrow |S_n(s)| \leq \exp[(\varepsilon+T\sin\beta)|\lambda_n|] \end{cases}$$

On pose :

$$\forall_{n\in\mathbb{N}^*} \quad \Re\lambda_n = \mu_n \wedge \Im\lambda_n = \nu_n \wedge \omega_n = \mathrm{Max}\{|\nu_p| \mid p\leq n\}$$

$$\forall_{s\in\mathcal{K}\wedge\Re s\in\mathbb{R}} \quad |S_n(s)| \leq \sum_{p=1}^{n} |a_p| \exp(\tau\nu_p-\sigma\mu_p)$$

$$\leq \sum_{p=1}^{n} |a_p| \exp(T\omega_n-\sigma|\lambda_n|) .$$

Soit un nombre ε de l'intervalle $]0,\gamma[$; on pose $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ et

$$M_{\varepsilon_1} = \sum_1^{\infty} |a_p| \exp(-\varepsilon_1 \mu_p)$$

(la série converge puisque $\Delta_o \supset]0,\gamma[$).

On a :

$$\forall_{n\in\mathbb{N}^*} \quad M_{\varepsilon_1} > \sum_{p=1}^{n} |a_p| \exp(-\varepsilon_1 \mu_p) \geq \sum_{p=1}^{n} |a_p| . \exp(-\varepsilon_1 |\lambda_n|) \ ,$$

et donc,

$$\sum_{p=1}^{n} |a_p| < M_{\varepsilon_1} \exp(\varepsilon_1 |\lambda_n|) \ ,$$

$$\forall_{s\in\mathcal{K}_\wedge \Re s=\sigma\in\mathbb{R}} \quad |S_n(s)| < \exp[\,|\lambda_n|(-\sigma+\omega_n T/|\lambda_n| + \varepsilon_1 + \log M_{\varepsilon_1}/|\lambda_n|)\,] \ .$$

On a :

$$\forall_{n\in\mathbb{N}^*} \quad \omega_n/|\lambda_n| \leq \sin\beta$$

$$\exists_{n_{\varepsilon_1}\in\mathbb{N}^*} \ \forall_{n\geq n_{\varepsilon_1}} \quad \log M_{\varepsilon_1}/|\lambda_n| < \varepsilon_1 \ ,$$

et donc

$$\forall_{n\geq n_{\varepsilon_1}} \quad |S_n(s)| < \exp[\,|\lambda_n|(-\sigma+T \sin\beta+\varepsilon)\,] \ .$$

La première partie de l'assertion est établie.

On a :

$$\forall_{n\in\mathbb{N}^*} \ \forall_{s\in\mathcal{K}_\wedge \Re s\in\mathbb{R}_+^*} \quad |S_n(s)|\exp(-\varepsilon_1|\lambda_n|) \leq \sum_{p=1}^{n} |a_p|\exp[-\varepsilon_1|\lambda_n|-\sigma\mu_p+\tau\nu_p]$$

$$\leq \exp(\omega_n T) \sum_{p=1}^{n} |a_p|\exp(-\varepsilon_1|\lambda_p|)$$

$$\leq \exp(\omega_n T) \sum_{p=1}^{n} |a_p|\exp(-\varepsilon_1\mu_p)$$

$$\leq M_{\varepsilon_1} \exp(\omega_n T) \ .$$

et donc

$$\forall_{n\in n_{\varepsilon_1}} \ \forall_{s\in\mathcal{K}_\wedge \Re s\in\mathbb{R}_+^*} \quad |S_n(s)| < \exp[\,|\lambda_n|(\varepsilon+T \sin\beta)\,] \ .$$

La seconde partie de l'assertion est établie.

Remarques.

(1) Si $\{f\}$ satisfait aux conditions figurant dans la proposition V.10, il est alors évident que :

$$\forall_{\mathcal{K}(\text{compact})\subset\mathbb{C}} \ \exists_{K\in\mathbb{R}_+} \ \forall_{s\in\mathcal{K}} \ \forall_{n\in\mathbb{N}^*} \ |S_n(s)| \leq \exp(K|\lambda_n|) \ .$$

(2) On peut aisément généraliser la proposition antérieure en s'affranchissant de toute condition portant sur les arguments des termes de la suite (λ_n) . A cette fin, supposant $\Delta_o \neq \phi$, on pose :

$$\forall_{s\in\Delta_o} \quad d(s) = \text{dist}(s,\text{Fr}(\Delta_o))$$

et

$$\forall_{s\in\mathbb{C}-\overline{\Delta}_o} \quad d(s) = -\text{dist}(s,\text{Fr}(\Delta_o)) \ ,$$

avec

$$\forall_s \ \{d(s) = 0 \ \Leftrightarrow \ \text{dist}(s,\text{Fr}(\Delta_o)) = 0 \ (\Leftrightarrow s \in \text{Fr}(\Delta_o))\} \ .$$

Rappelant que $\mathcal{K}$ désigne un compact de $\mathbb{C}$, on énonce :

Proposition V.11.

Si le domaine maximal de convergence absolue Δ_o de l'élément dirichlétien $\{f\}$ n'est pas vide, on a :

$$\forall_{\mathcal{K}} \ \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*} \ \exists_{n'\in\mathbb{N}^*} \ \forall_{n\geq n'} \ \forall_{s\in\mathcal{K}} \begin{cases} s\in\mathbb{C}-\Delta_o \Rightarrow |S_n(s)| < \exp[-(d(s)+\varepsilon)|\lambda_n|] \\ s\in\overline{\Delta}_o \Rightarrow |S_n(s)| < \exp(\varepsilon|\lambda_n|) \ . \end{cases}$$

On va considérer successivement les deux cas : $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}-\Delta_o$ et $\mathcal{K} \subset \overline{\Delta}_o$

1) $\mathcal{K} \subset \mathbb{C} - \Delta_o$.

Soit s_o un point de Δ_o . On pose $s' = s-s_o$,

$$\forall_{p\in\mathbb{N}^*} \quad a'_p = a_p \exp(-s_o\lambda_p) \ .$$

On a $S_n(s) = \sum_{p=1}^{n} a_p \exp(-s\lambda_p) = \sum_{p=1}^{n} a'_p \exp(-s'\lambda_p)$. On considère une constante réelle α et on pose :

$$\forall_{s(\neq s_o)} \quad s'_\alpha = s' \exp(i\alpha)$$

$$\underset{n\in\mathbb{N}^*}{\forall} \quad \lambda_{n,\alpha} = \lambda_n \exp(-i\alpha)$$

et on a :

$$\exp(-s'\lambda_n) = \exp[-s'_\alpha \lambda_{n,\alpha}] \quad .$$

On considère une constante strictement positive ε , et on désigne par ε_1 une constante de l'intervalle ouvert :

$$]0, \mathrm{Inf}(\varepsilon, 3\ \mathrm{Inf}\{|s'| \mid s\in\mathcal{K}\})[\quad .$$

On pose :

$$\Re s'_\alpha = \sigma'_\alpha \wedge \Im s'_\alpha = \tau'_\alpha$$

$$T_\alpha = \sup\{|\tau'_\alpha| \mid s\in\mathcal{K}\}$$

$$T = \sup\{T_\alpha \mid \alpha\in]-\pi,\pi]\} \quad .$$

On considère un nombre β de $]0,\pi/2[$ satisfaisant à la condition :

$$T \sin\beta < \varepsilon_1/3$$

et on pose

$$\underset{p\in\mathbb{N}^*}{\forall} \quad \begin{cases} a'^{\alpha}_p = a'_p \Leftrightarrow \mathrm{Arg}\ \lambda_p \in]\alpha-\beta,\alpha+\beta[\\ a'^{\alpha}_p = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Arg}\ \lambda_p \notin]\alpha-\beta,\alpha+\beta[\end{cases}$$

$$S_{n,\alpha}(s) = \sum_{p=1}^{n} a'^{\alpha}_p \exp(-s'\lambda_p) = \sum_{p=1}^{n} a'^{\alpha}_p \exp(-s'_\alpha \lambda_{n,\alpha}) \quad .$$

On désigne par $\{f^{\alpha,\beta}\}$ l'élément dirichlétien

$$\sum_{1}^{\infty} a'^{\alpha}_n \exp(-s'_\alpha \lambda_{n,\alpha}) \quad .$$

Il est trivial que $\{f^{\alpha,\beta}\}$ satisfait aux conditions de la proposition V.10 et donc (puisque $|\lambda_n| = |\lambda_{n,\alpha}|$) :

$$\underset{n(=n_\alpha)\in\mathbb{N}^*}{\exists} \quad \underset{n\geq n_\alpha}{\forall} \quad \underset{s\in\mathcal{K}}{\forall} \quad \begin{cases} \Re s'_\alpha \leq 0 \Rightarrow |S_{n,\alpha}(s)| < \exp[(-\Re s'_\alpha + \varepsilon_1/3 + T\sin\beta)|\lambda_n|] \\ \Re s_\alpha > 0 \Rightarrow |S_{n,\alpha}(s)| < \exp[(\varepsilon_1/3 + T\sin\beta)|\lambda_n|] \end{cases} .$$

Or $\underset{\alpha}{\forall}\ -\Re s'_\alpha \leq |s'_\alpha| = |s'|$ et $\varepsilon_1/3 < |s'|$ (et compte tenu de $T \sin\beta < \varepsilon_1/3$) on a :

$$\underset{n\geq n_\alpha}{\forall}\ \underset{s\in\mathcal{K}}{\forall}\quad |S_{n,\alpha}(s)| < \exp[(|s'| + 2\varepsilon_1/3)|\lambda_n|]$$

β est indépendant de α . La famille des intervalles $]\alpha-\beta,\alpha+\beta[$ indexés par α sur $]-\pi,\pi]$ forme un recouvrement ouvert du compact $[-\pi,\pi]$. On peut en extraire un recouvrement ouvert fini à p éléments et utiliser ce recouvrement pour trouver une partition finie à p éléments de l'intervalle $]-\pi,\pi]$ (chaque élément de la partition étant un intervalle appartenant à un élément du recouvrement fini). Utilisant une technique analogue à celle de la définition de $\{f^{\alpha,\beta}\}$ à partir de $\{f\}$, on peut définir respectivement p sous-éléments dirichlétiens de $\{f\}$ -que l'on note $\{f_1\}$, $\{f_1\},\ldots,\{f_p\}$- associés respectivement aux p intervalles constituant la partition de $]-\pi,\pi]$. Appliquant à chacun d'eux les résultats ci-dessus, on a :

$$\underset{n'\in\mathbb{N}^*}{\exists}\ \underset{n\geq n'}{\forall}\ \underset{s\in\mathcal{K}}{\forall}\quad \begin{cases} |S_n(s)| < p\,\exp[(|s'| + 2\varepsilon_1/3)|\lambda_n|] \\ \qquad < \exp[(|s'| + \varepsilon_1)|\lambda_n|] \end{cases} .$$

On remarquera que n' dépend de ε_1 et que ε_1 dépend du choix de s_o . s étant un point arbitraire fixé sur $\mathcal{K}$, on peut avoir, pour un choix convenable du point s_o dans Δ_o :

$$|s'| + \varepsilon_1 < \mathrm{dist}(s,\mathrm{Fr}(\Delta_o)) + \varepsilon = -d(s) + \varepsilon \quad ,$$

et plus précisément encore (pour un tel choix de s_o et de ε_1 satisfaisant à la condition $]0,3\ \mathrm{Inf}\{|s'|\,|s\in\mathcal{K}\}[$) :

$$\underset{V_s}{\exists}\ \underset{s'\in V_s}{\forall}\quad |s'-s_o| + \varepsilon_1 < -d(s') + \varepsilon \ .$$

Or s est arbitraire sur $\mathcal{K}$. Ainsi :

$$\underset{s\in\mathcal{K}}{\forall}\ \underset{z\in\Delta_o}{\exists}\ \underset{\varepsilon_1\in]0,3\ \mathrm{Inf}\{|s-z|\,|s\in\mathcal{K}\}[}{\exists}\ \underset{V_s}{\exists}\ \underset{s'\in V_s}{\forall}\quad |s'-z| + \varepsilon_1 < -d(s') + \varepsilon$$

(il est trivial que z et ε_1 dépendent du point s ; on le rappellera le cas échéant en posant, comme il est usuel , $z = z_s$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1,s}$) .

La famille des voisinages ouverts V_s indexés par s sur $\mathcal{K}$, ainsi mise en évidence, est un recouvrement ouvert du compact $\mathcal{K}$. On peut en extraire un recouvrement ouvert fini ; en d'autres termes : il existe p points de $\mathcal{K}$, $\{s_1,s_2,\ldots,s_p\}$, tels que :

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{j=1}^{p} V_{s_j}$$

et il existe p valeurs de ε_1 ; $\{\varepsilon_{1,s_1}, \varepsilon_{1,s_2}, \ldots, \varepsilon_{1,s_p}\}$, et p points de Δ_o , $\{z_{s_1}, \ldots, z_{s_p}\}$, associés aux p points $\{s_1, s_2, \ldots, s_p\}$, tels que

$$\forall_{j\in\{1,2,\ldots,p\}} \quad \forall_{s'\in V_{s_j}} \quad |s'-z_{s_j}| + \varepsilon_{1,s_j} < -d(s')+\varepsilon \ .$$

Et donc (eu égard à la remarque relative à la dépendance de n' par rapport à ε_1) on a :

$$\forall_{j\in\{1,2,..,p\}} \quad \exists_{n'(=n'_j)\in\mathbb{N}^*} \quad \forall_{n\geq n'} \quad \forall_{s'\in V_{s_j}\cap\mathcal{K}} \quad |S_n(s')| < \exp[(|s'-z_{s_j}|+\varepsilon_{1,s_j})|\lambda_n|] < \exp[(-d(s')+\varepsilon)|\lambda_n|] \ .$$

En définitive :

$$\exists_{n''=\mathrm{Max}\{n'_j | j\in\{1,2,\ldots,p\}\}} \quad \forall_{s\in\mathcal{K}} \quad |S_n(s)| < \exp[(-d(s)+\varepsilon)|\lambda_n|]$$

2) $\mathcal{K} \subset \overline{\Delta_o}$.

On a : $\mathcal{K} = (\mathcal{K} \cap \Delta_o) \cup (\mathcal{K} \cap \mathrm{Fr}(\Delta_o))$. ε désignant encore la constante considérée au cas (1), on a, comme il est évident :

$$\forall_{s\in\mathcal{K}\cap\Delta_o} \quad \exists_{V_s\subset\Delta_o} \quad \exists_{n(=n_s)\in\mathbb{N}^*} \quad \forall_{n\geq n_s} \quad \forall_{s'\in V_s} \quad |S_n(s')| < \exp[\varepsilon|\lambda_n|/2] \ ;$$

en effet, sinon on aurait :

$$\exists_{s\in\mathcal{K}\cap\Delta_o} \quad \forall_{V_s\subset\Delta_o} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}^*} \quad \exists_{n'\geq n} \quad \exists_{s'\in V_s} \quad |S_{n'}(s')| \geq \exp[\varepsilon|\lambda_{n'}|/2] \ ;$$

et donc choisissant pour V_s un disque $d(s,1/n)$ de centre s et de rayon $1/n$, on a :

$$\exists_{s\in\mathcal{K}\cap\Delta_o} \quad \exists_{n_o} \quad \exists_{(j_n)} \quad \forall_{n\geq n_o} \quad \exists_{s_n\in d(s,1/n)\subset\Delta_o} \quad \sum_{p=1}^{\infty} |a_p \exp(-s_n\lambda_p)| \geq |S_{j_n}(s_n)| \geq \exp[\varepsilon|\lambda_{j_n}|/2]$$

(où $\forall_{n\in\mathbb{N}^*} \ j_n \geq n$) . $\{f\}$ divergerait absolument en chaque point s_n ; la contradiction entraîne la validité de l'assertion.

Proposition V.12.

Sous les conditions :

1) $\exists_{\beta\in[0,\pi/2[} \ \forall_{n\in\mathbb{N}^*} \ |\mathrm{Arg}\ \lambda_n| \leq \beta$;

2) $\exists_{\gamma\in\mathbb{R}^*} \ \Delta_o \supset]0,\gamma[$

3) $\mathcal{K}$ est une partie compacte de $\Delta_o \cap \{s\in\mathbb{C} \mid \Re s > 0\}$ satisfaisant à :

$$\exists_{\varepsilon\in]0,\gamma[} \ \forall_{s\in\mathcal{K}} \ \varepsilon/2 + i\,\Im s \in \Delta_o \ ,$$

on a :

$$\exists_{n'\in\mathbb{N}^*} \ \forall_{n\geq n'} \ \forall_{s\in\mathcal{K}} \ \Big|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \exp(-s\lambda_j)\Big| < \exp\big[|\lambda_{n+1}|(-\Re s+\varepsilon)\cos\beta\big] \ .$$

On pose :

$$\sigma_* = \mathrm{Inf}\{\sigma \mid s\in\mathcal{K}\} \ .$$

Il est trivial que $\sigma_* > 0$. On va étudier successivement les deux cas : $\varepsilon \in]0,\sigma_*[$ et $\varepsilon \geq \sigma_*$.

1) $\varepsilon \in]0,\sigma_*[$.

On a, en posant comme antérieurement, $\mu_j = \Re\lambda_j$, $\nu_j = \Im\lambda_j$ et $\tau = \Im s$:

$$\forall_{s\in\mathcal{K}} \ \forall_{n\in\mathbb{N}} \ \Big|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \exp(-s\lambda_j)\Big| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| \exp(-\sigma\mu_j+\tau\nu_j)$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| \exp[-\sigma|\lambda_j|\cos\beta]\exp[-\varepsilon(\mu_j-|\lambda_j|\cos\beta)+\tau\nu_j]$$

$$\leq \exp[-(\sigma-\varepsilon/2)|\lambda_{n+1}|\cos\beta] \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \exp[-\varepsilon/2\ \mu_j+\tau\nu_j] \ .$$

Pour chaque s du compact $\mathcal{K}$, la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \exp[-\varepsilon\mu_j/2+\tau\nu_j]$$

converge, puisque $\forall_{s\in\mathcal{K}} \ \varepsilon/2 + i\tau \in \Delta_o$.

Puisque $\mathcal{K}$ est un compact de Δ_o , on a :

$$\sup\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \exp[-\varepsilon\mu_j/2+\tau\nu_j] \mid s\in\mathcal{K}\Big\} \in \mathbf{R}_+^* \ .$$

On désigne ce supremum par α (il est trivial que $\alpha = \alpha_{\mathcal{K}}$) et on a :

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall_{s\in\mathcal{K}} \quad \Big| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \exp(-s\lambda_j) \Big| < \alpha \exp[-(\sigma-\varepsilon/2)\,|\lambda_{n+1}|\cos\beta] ,$$

et donc, en définitive :

$$\exists_{n'\in\mathbb{N}^*} \quad \forall_{n\geq n'} \quad \forall_{s\in\mathcal{K}} \quad \Big| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \exp(-s\lambda_j) \Big| < \exp[-(\sigma-\varepsilon)\,|\lambda_{n+1}|\cos\beta] .$$

Proposition V.13.

Sous la condition : Δ_o est une partie stricte non vide de $\mathbb{C}$, on a :

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*} \quad \exists_{n'\in\mathbb{N}^*} \quad \forall_{n\geq n'} \quad \forall_{s\in\mathcal{K}} \quad \Big| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \exp(-s\lambda_j) \Big| < \exp[(-d(s)+\varepsilon)\,|\lambda_{n+1}|] .$$

Soit s_o un point arbitraire de Δ_o. On désigne par δ_{s_o} le disque ouvert de centre s_o et de rayon $d(s_o)$ et on pose :

$$\forall_{s\in\mathbb{C}} \quad s' = s - s_1$$

et

$$s'_\alpha = s' \exp(i\alpha) ,$$

où s_1 est un point de $\mathrm{Fr}(\delta_{s_o})$ et où la constante réelle α est choisie de sorte que

$$\forall_{s\in\delta_{s_o}} \quad \Re s'_\alpha > 0$$

(plus vulgairement, on a fait une translation suivie d'une rotation des axes) soit ε une constante de l'intervalle $]0, d(s_o)[$. Soit β un nombre de l'intervalle $]0, \pi/2[$ tel qu'il existe un voisinage ouvert V_{s_o} du point s_o satisfaisant à la condition :

$$\forall_{s\in V_{s_o}} \quad [d(s_o) - |s-s_o| - 3\varepsilon/4] \geq d(s) - \varepsilon$$

(l'existence d'un tel voisinage résulte de la continuité des deux applications $s \mapsto d(s_o) - |s-s_o| - 3\varepsilon/4$ et $s \mapsto d(s) - \varepsilon$, ayant respectivement les limites $d(s_o) - 3\varepsilon/4$ et $d(s_o) - \varepsilon$ lorsque $s \to s_o$). Par exemple, on peut choisir pour V_{s_o} le disque de centre s_o et de rayon $\varepsilon/10$.

On pose, comme on l'a déjà fait antérieurement dans la proposition V.11 :

$$\forall_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{ \begin{array}{l} a'_n = a_n \exp(-s_1\lambda_n) \\ \\ \lambda_{n,\alpha} = \lambda_n \exp(-i\alpha) \end{array} \right\} \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} a'^{\alpha}_n = a'_n \Leftrightarrow \mathrm{Arg}\ \lambda_n \in\ ]\alpha-\beta,\alpha+\beta[\\ \\ a'^{\alpha}_n = 0 \quad \Leftrightarrow \mathrm{Arg}\ \lambda_n \notin\ ]\alpha-\beta,\alpha+\beta[\end{array} \right\} .$$

On remarque que $a_n \exp(-s\lambda_n) = a'_n \exp(-s'_\alpha \lambda_{n,\alpha})$ et on désigne par $\{f^{\alpha,\beta}\}$ l'élément dirichlétien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'^{\alpha}_n \exp(-s'_\alpha \lambda_{n,\alpha}) .$$

On pose :

$$\forall_{s\in\Delta_o} \quad R_{n,\alpha}(s) = \sum_{p=n+1}^{\infty} a'^{\alpha}_p \exp(-s'_\alpha \lambda_{p,\alpha})$$

et $\sigma'_\alpha = \Re s'_\alpha$; il est trivial que :

$$\forall_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad \sigma'_\alpha \geq d(s_o) - |s-s_o| .$$

L'élément dirichlétien $\{f^{\alpha,\beta}\}$ vérifie les conditions de la proposition V.12 et donc :

$$\exists_{n(=n_\alpha)\in\mathbb{N}^*} \ \forall_{n\geq n_\alpha} \ \forall_{s\in V_{s_o}} \quad |R_{n,\alpha}(s)| < \exp[\,|\lambda_{n+1}|(-\sigma'_\alpha+\varepsilon/2)\cos\beta\,] < \exp[\,|\lambda_{n+1}|(-d(s_o)+|s-s_o|+\varepsilon/2)\cos\beta\,] .$$

On remarquera que le choix de β est indépendant de α .

La famille des intervalles $]\alpha-\beta,\alpha+\beta[$ indexés par α sur $[-\pi,\pi]$ est un recouvrement ouvert du compact $[-\pi,\pi]$.
On peut extraire de cette famille un nombre fini p d'intervalles constituant un recouvrement ouvert fini de $[-\pi,\pi]$ et donc à fortiori de $]-\pi,\pi]$, et utiliser ces intervalles pour définir au plus p sous-éléments dirichlétiens de $\{f\}$ -que l'on note $\{f_1\}$, $\{f_2\}$, ..., $\{f_p\}$- vérifiant chacune des conditions du type vérifié par $\{f^{\alpha,\beta}\}$ et tels que :

$$\forall_{s\in\Delta_o} \quad \{f\}_s = \sum_{j=1}^{p} \{f_j\}_s$$

(où $\{f\}_s$ et $\{f_j\}_s$ désignent respectivement les valeurs au point s de $\{f\}$ et $\{f_j\}$) . Donc,

$$\exists_{n'\in\mathbb{N}^*} \ \forall_{n\geq n'} \ \forall_{s\in V_{s_o}} \quad \Big|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \exp(-s\lambda_j)\Big| < \exp[\,|\lambda_{n+1}|(-d(s_o)+|s-s_o|+3\varepsilon/4)\cos\beta\,] < \exp[\,|\lambda_{n+1}|(-d(s)+\varepsilon)\,] .$$

L'assertion de la proposition V.13 est dès lors évidente.

On considère la suite $(\wp_n)$ des polynômes-sections

$$\wp_n : \sum_{p=1}^{n} a_p \exp(-s\lambda_p)$$

de l'élément dirichlétien $\{f\}$. On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des zéros des $\wp_n$, par $\mathcal{E}'$ le dérivé de $\mathcal{E}$, et par $\mathcal{E}''$ l'ensemble des points de $\mathbb{C}$ qui sont racines d'une infinité de polynômes-sections. On pose $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}' \cup \mathcal{E}''$ et on énonce :

Proposition V.14.

Sous les conditions :

1) $\mathcal{B}$ $(\neq \phi)$ est un domaine tel que $\mathcal{B} \cap \mathcal{E}^* = \phi$ et $\Delta_o \neq \phi$.

2) il existe une partie ouverte G $(\neq \phi)$ de $\mathcal{B}$ sur laquelle la suite $(\wp_n)$ converge uniformément,

on a :

$$\mathcal{B} \subset D^{\circ}_{*,o} .$$

On considère un point s_o de $\mathcal{B}$ et un compact $\mathcal{K}$ de $\mathcal{B}$ satisfaisant aux considérations :

$$\overset{\circ}{\mathcal{K}} \cap G \neq \phi$$
$$s_o \in \overset{\circ}{\mathcal{K}} .$$

On a :

$$\underset{n_o \in \mathbb{N}^*}{\exists} \quad \underset{n \geq n_o}{\forall} \quad \underset{s \in \mathcal{K}}{\forall} \quad \wp_n(s) \neq 0 ;$$

en effet, sinon

$$\underset{n \in \mathbb{N}^*}{\forall} \quad \underset{n' \geq n}{\exists} \quad \underset{s \in \mathcal{K}}{\exists} \quad \wp_{n'}(s) = 0 ,$$

et donc, il existe une suite infinie d'entiers, strictement croissante, (n_j), et une suite infinie de points de $\mathcal{K}$, (s_j), telles que :

$$\underset{j \in \mathbb{N}^*}{\forall} \quad \wp_{n_j}(s_j) = 0 ;$$

la suite (s_j) possède au moins un point d'accumulation sur $\mathcal{K}$ (et donc $\mathcal{K} \cap \mathcal{E}' \neq \phi$) ou -à défaut- un point limite sur $\mathcal{K}$ (et donc $\mathcal{K} \cap \mathcal{E}'' \neq \phi$) ; en définitive $\mathcal{K} \cap \mathcal{E}^* \neq \phi$. La contradiction établit la propriété.

Eu égard à la proposition V.11, il est évident que :

$$\exists_{K\in\mathbb{R}_+^*} \ \forall_{n\geq n_o} \ \forall_{s\in\mathcal{K}} \quad |\wp_n(s)| < \exp[K|\lambda_n|]$$

on désigne par L_n une branche de $z \mapsto \log z$ holomorphe dans le disque $d(\wp_n(s_o), |\wp_n(s_o)|)$. Puisque les $\wp_n$ sont continues au point s_o , on a :

$$\forall_{n\geq n_o} \ \exists_{\rho(=\rho_n)\in\mathbb{R}_+^*} \ \forall_{s\in d(s_o,\rho)} \quad \wp_n(s) \in d(\wp_n(s_o), |\wp_n(s_o)|) .$$

(où $d(s_o,\rho)$ est le disque ouvert de centre s_o et de rayon ρ) .

On pose :

$$\forall_{n\geq n_o} \ \forall_{s\in d(s_o,\rho_n)} \quad h_n(s) = \exp[L_n\wp_n(s)/|\lambda_n|] \ ;$$

h_n est holomorphe dans le disque $d(s_o,\rho_n)$. On a :

$$\Re L_n\wp_n(s) = \log|\wp_n(s)| ,$$

où $\log z$ désigne le logarithme principal de z $(\Leftrightarrow \forall_{z\neq 0} \ \operatorname{I}\log z \in]-\pi,\pi])$, et donc

$$\forall_{n\geq n_o} \ \forall_{s\in d(s_o,\rho_n)} \quad |h_n(s)| = |\exp[L_n\wp_n(s)/|\lambda_n|]| = \exp[\log|\wp_n(s)|/|\lambda_n|]$$

$s \mapsto \log|\wp_n(s)|$ est harmonique dans $d(s_o,\rho_n)$, et puisque s_o est arbitraire dans $\mathring{\mathcal{K}}$, cette application est harmonique dans $\mathring{\mathcal{K}}$. On a :

$$\forall_{n\geq n_o} \ \forall_{s\in\mathcal{K}} \quad \log|\wp_n(s)| < K|\lambda_n|$$

et donc

$$|h_n(s)| < e^K = K' .$$

La suite (h_n) est harmonique et bornée dans $\mathring{\mathcal{K}}$. Sur $G \cap \mathring{\mathcal{K}}$ la suite $(\wp_n)$ convergence uniformément vers une application holomorphe (et donc harmonique) f . La suite des applications $s \mapsto \log|\wp_n(s)|$ converge uniformément sur $G \cap \mathring{\mathcal{K}}$, vers l'application $s \mapsto \log|f(s)|$; cette application est harmonique. Donc la suite des applications $s \mapsto \log|\wp_n(s)|/|\lambda_n|$ converge uniformément vers une application prenant la valeur 0 en chaque point de $G \cap \mathring{\mathcal{K}}$; donc

$$s \mapsto |h_n(s)| = \exp[\log|\wp_n(s)|/|\lambda_n|]$$

converge uniformément vers une application prenant la valeur 1 en chaque point

de $G \cap \mathring{\mathcal{K}}$.

La suite (h_n) est bornée dans $\mathring{\mathcal{K}}$; elle est donc normale dans $\mathring{\mathcal{K}}$. On peut extraire de (h_n) une sous-suite (h_{n_j}) telle que $(s \to |h_{n_j}(s)|)$ converge uniformément sur tout compact $\mathcal{K}_1$ de $\mathcal{K}$ vers une application harmonique qui prend la valeur 1 en chaque point de $G \cap \mathring{\mathcal{K}}$. Donc $(s \to |h_n(s)|)$ converge uniformément sur $\mathcal{K}_1 \subset \mathring{\mathcal{K}}$ vers une application prenant la valeur 1 en chaque point de $\mathcal{K}_1$ et donc en chaque point de $\mathring{\mathcal{K}}$. On a en particulier :

$$\underset{\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*}{\forall} \quad \underset{n(=n_\varepsilon)\in\mathbb{N}^*}{\exists} \quad \underset{n\geq n_\varepsilon}{\forall} \quad |h_n(s_o)| < 1+\varepsilon$$

$$\underset{n\geq n_\varepsilon}{\forall} \quad |a_n \exp(-s_o\lambda_n)| = |\wp_n(s_o)-\wp_{n-1}(s_o)| < 2(1+\varepsilon)^{|\lambda_n|}$$

$$d(n,s_o) > -\log 2/|\lambda_n| - \log(1+\varepsilon) ,$$

et donc

$$d_*(s_o) \geq 0 \Rightarrow \mathcal{D} \subset \overline{D}_{*,o} \Rightarrow \mathcal{D} \subset D_{*,o}$$

(puisque $\mathcal{D}$ est un ouvert) .

Corollaire V.14.1.

On a :

1) $\underset{\mathcal{D}(\text{domaine})\subset\mathbb{C}}{\forall} \{[\mathcal{D}\cap Fr(\Delta_o) \neq \phi \wedge \mathcal{D}\cap Fr(D_{*,o}) \neq \phi] \Rightarrow \mathcal{D} \cap \mathcal{E}^* \neq \phi\}$

de même,

2) $\underset{\mathcal{C}(\text{continu})\subset\mathbb{C}}{\forall} \{[\mathcal{C}\cap Fr(\Delta_o) \neq \phi \wedge \mathcal{C}\cap Fr(D_{*,o}) \neq \phi] \Rightarrow \mathcal{C}\cap\mathcal{E}^* \neq \phi\}$

($\mathcal{C}$ pouvant se réduire à un point).

a) Soit $\mathcal{D}$ un domaine dont les intersections avec $Fr(\Delta_o)$ et $Fr(D_{*,o})$ sont non-vides. On a donc :

$$\mathcal{D}\cap\Delta_o \neq \phi \quad \wedge \quad \mathcal{D}\cap(\mathbb{C}-D_{*,o}) \neq \phi ,$$

et supposons que $\mathcal{D}\cap\mathcal{E}^* = \phi$.

$\mathcal{D}\cap\Delta_o$ étant un ouvert non-vide de $\mathcal{D}$ sur lequel la suite $(\wp_n)$ converge vers une application f à valeurs finies, on sait d'après le théorème d'Osgood qu'il existe un ouvert G , partout dense dans $\mathcal{D}\cap\Delta_o$, sur lequel

$(\wp_n)$ converge sous-uniformément vers la restriction de f à G, que l'on note f_G. L'application f_G est holomorphe sur G. Les conditions de la proposition V.14 sont satisfaites et par conséquent $\mathcal{B} \subset D_{*,o}$; d'où $\mathcal{B} \cap \mathbb{C} - D_{*,o} = \phi$. La conjonction $\mathcal{B} \cap Fr(\Delta_o) \neq \phi \wedge \mathcal{B} \cap Fr(D_{*,o}) \neq \phi$ est donc fausse. La contradiction établit la validité de l'implication (1).

b) Soit $\mathcal{C}$ un continu de $\mathbb{C}$ dont les intersections avec $Fr(\Delta_o)$ et $Fr(D_{*,o})$ sont non-vides. Pour chaque ε strictement positif, l'ensemble $\mathcal{C}_\varepsilon$ est un domaine satisfaisant aux conditions du membre de gauche dans l'implication (1), et donc $\mathcal{C}_\varepsilon \cap \mathcal{E}^* \neq \phi$. On choisit une suite (ε_n) strictement positive et strictement décroissante vers zéro. On a :

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \mathcal{C}_{\varepsilon_{n+1}} \subset \overline{\mathcal{C}}_{\varepsilon_{n+1}} \subset \mathcal{C}_{\varepsilon_n} \text{ , avec } \overline{\mathcal{C}}_{\varepsilon_{n+1}} \cap \mathcal{E}^* \neq \phi \text{ ;}$$

la suite des fermés $(\overline{\mathcal{C}}_{\varepsilon_n})$ est décroissante et chacun d'eux est inclus dans le compact $\overline{\mathcal{C}}_{\varepsilon_o}$. L'ensemble $\mathcal{E}^*$ est un fermé. On a donc

$$\Phi \neq \bigcap_n (\overline{\mathcal{C}}_{\varepsilon_n} \cap \mathcal{E}^*) = (\bigcap_n \overline{\mathcal{C}}_{\varepsilon_n}) \cap \mathcal{E}^* = \mathcal{C} \cap \mathcal{E}^* \ .$$

Dans le cas où $\mathcal{C}$ se réduit à un point s de $\mathbb{C}$, l'implication (2) devient:

$$\forall_s \{ s \in Fr(\Delta_o) \cap Fr(D_{*,0}) \Rightarrow s \in \mathcal{E}^* \} \ .$$

La démonstration est la même, mot pour mot, en considérant pour domaine $\mathcal{C}_\varepsilon$ le disque $\{s\}_\varepsilon$ (de centre s et de rayon $\varepsilon > 0$)

Corollaire V.14.2.

On a :

$$\Delta_o = D_{*,o} \Rightarrow \forall_{s \in Fr(\Delta_o)} \ s \in \mathcal{E}^* \ .$$

Le cas $\Delta_o = D_{*,o}$ est réalisé lorsque $L = 0$.

Proposition V.15.

Sous les conditions :

1) il existe un nombre strictement positif θ et une suite infinie strictement croissante d'entiers (n_j), $j \in \mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall_{j \in \mathbb{N}^*} \ |\lambda_{n_j+1} / \lambda_{n_j}| \geq 1+\theta \ ,$$

2) il existe un point s_o de $Fr(\Delta_o)$ régulier pour le prolongement holomorphe f de l'application $\Delta_o \ni s \to \{f\}_s$ (où $\{f\}_s$ désigne la somme de l'élément $\{f\}$ en s) , et en lequel $Fr(\Delta_o)$ admet une tangente,

la suite $(\wp_{n_j})$ converge uniformément dans un voisinage du point s_o .

Pour plus de simplicité technique, on peut supposer que $s_o = 0$, que Δ_o est tangent en ce point à l'axe imaginaire ($\Leftrightarrow Fr(\Delta_o)$ admet en $s_o = 0$ une tangente qui est l'axe imaginaire) et que $\Delta_o \subset \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > 0\}$.

Soit une constante β de $]0, \pi/2[$. On considère les deux suites de constantes (a'_n) et (a''_n) définies de la manière suivante :

$$a'_n = a_n \wedge a''_n = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Arg} \lambda_n \notin [-\beta, \beta]$$

$$a'_n = 0 \wedge a''_n = a_n \Leftrightarrow \operatorname{Arg} \lambda_n \in [-\beta, \beta]$$

et on désigne par :

$\{f_\beta\}$ l'élément dirichlétien $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n \exp(-s\lambda_n)$

$\{f^\beta\}$ " " $\sum_{n=1}^{\infty} a''_n \exp(-s\lambda_n)$.

Eu égard à la proposition V.5 il existe un voisinage (non vide) $V_{\beta,o}$ du point $s = 0$ sur lequel $\{f_\beta\}$ converge absolument. D'après la proposition V.13, on sait que $\{f_\beta\}$ converge uniformément sur tout compact de ce voisinage. On désigne par f_β le prolongement holomorphe de l'application $\Delta_o \ni s \mapsto \{f_\beta\}_s$ (où $\{f_\beta\}_s$ désigne la valeur (somme) de $\{f_\beta\}$ en s) . On pose :

$$\forall_{n \in \mathbb{N}^*} \quad \wp_n^\beta(s) = \sum_{p=1}^{n} a''_p \exp(-s\lambda_p)$$

et on se propose de prouver que la suite $(\wp_{n_j}^\beta)$, $j \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément dans un voisinage du point 0 . On considère un nombre a de l'intervalle $]0, a[$ satisfaisant, en outre, à la condition suivante :

$$h(a, \theta) < -\theta a^4/2 ,$$

avec $h(a,\theta) = (1+\theta)(a^3-a^2) \log[(1+a^2)/(1+a^3)] + (a^3+a^4) \log[(1+a^3)/(1-a)]$.
Il est trivial qu'une telle condition est satisfaite par un choix de a strictement positif suffisamment petit puisque la partie principale de $h(a,\theta)$ est $-\theta a^4$.

On considère un nombre β de l'intervalle $]0,\pi/2[$ satisfaisant à la condition

$$\operatorname{tg}\beta < a^3/4 \ .$$

On désigne par f^β le prolongement holomorphe de $\Delta_o \ni s \to \{f^\beta\}$. Puisqu'il existe un voisinage V_o du point 0 dans lequel f est holomorphe, il est trivial que f^β est holomorphe dans $V_o \cap V_{\beta,o}$ et donc il existe un nombre réel strictement positif K tel que f^β est holomorphe sur l'adhérence du disque d_1 de centre Ka et de rayon égal à $K(a+a^3)$. On considère les disques concentriques de centre Ka , d_2 et d_3 , de rayons respectifs égaux à $K(a+a^4)$ et $K(a-a^2)$. On désigne par $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ respectivement les frontières de d_1 , d_2 , d_3 . Eu égard à la proposition V.10, on a :

$$\exists_{j_o\in\mathbb{N}^*} \ \forall_{j\geq j_o} \ \forall_{s\in\mathcal{C}_1\wedge\wp^\beta_{n_j}(s)\neq 0} \ (1/|\lambda_{n_j}|)\log|\wp^\beta_{n_j}(s)| < Ka^3 + \frac{Ka^4}{4} + T\sin\beta$$

(ici $Ka^4/4$ joue le rôle de la constante ε dans la proposition V.10, et T est défini en choisissant pour compact $\mathcal{K}$ la frontière $\mathcal{C}_1$) . On a :

$$T\sin\beta < T\operatorname{tg}\beta < K(a+a^3)\frac{a^3}{4} \ .$$

Il est trivial qu'on a :

$$K(a+a^3)a^3/4 < Ka^4/2 \ .$$

Or f^β est holomorphe et donc bornée sur l'adhérence de d_1 ; on a donc (eu égard à la majoration précédente de $T\sin\beta$)

$$\exists_{j_1\in\mathbb{N}^*} \ \forall_{j\geq j_1} \ \forall_{s\in\mathcal{C}_1} \ |f^\beta(s)-\wp^\beta_{n_j}(s)| < \exp[\,|\lambda_{n_j}|(a^3+a^4)K\,] \ .$$

Puisque l'adhérence de d_3 satisfait aux conditions de la proposition V.12 , on a :

$$\exists_{j_2\in\mathbb{N}^*} \ \forall_{j\geq j_2} \ \forall_{s\in\mathcal{C}_3\wedge\sum_{n_j+1}^{\infty}\ldots\neq 0} \ (1/|\lambda_{n_j+1}|)\log\Big|\sum_{n_j+1}^{\infty} a''_p\exp(-s\lambda_p)\Big| < [-Ka^2+\frac{Ka^3}{2}]\cos\beta$$

(où $\frac{Ka^3}{2}$ joue le rôle de la constante ε dans cette proposition V.12).

Il est trivial que l'inégalité

$$(-Ka^2 + \frac{Ka^3}{2})\cos\beta \leq -Ka^2 + Ka^3$$

est satisfaite par un choix de $a > 0$ suffisamment petit et un choix conséquent de β (sous les conditions antérieures). On a donc :

$$\forall_{j\geq j_2} \quad \forall_{s\in C_3 \wedge \sum_{n_j+1}^{\infty} \ldots \neq 0} \quad \log\left|\sum_{n_j+1}^{\infty} a''_p \exp(-s\lambda_p)\right| < (1+\theta)\,|\lambda_{n_j}|K(a^3-a^2) ,$$

Puisque $-Ka^2 + Ka^3 < 0$, on pose :

$$M_j = \sup|f^\beta(s) - \wp^\beta_{n_j}(s)| , \quad s \in C_2 .$$

Eu égard au théorème des trois cercles de Hadamard, on a pour chaque $j \geq \max(j_1, j_2)$:

$$\mathrm{Log}\left(\frac{1+a^2}{1-a}\right)\log M_j \leq \log\left(\frac{1+a^2}{1+a^3}\right).\left[|\lambda_{n_j}|(1+\theta)K(a^3-a^2)\right] + \log\left(\frac{1+a^3}{1-a}\right).\left[|\lambda_{n_j}|K(a^3+a^4)\right]$$

$$= |\lambda_{n_j}|Kh(a,\theta) < -|\lambda_{n_j}|\theta Ka^4/2 ,$$

et donc $\lim M_j = 0$, $j \to \infty$.

La suite $(\wp^\beta_{n_j})$ converge uniformément vers f^β sur l'adhérence du disque d_2 . En définitive $(\wp_{n_j})$ converge uniformément sur l'adhérence de d_2 vers la restriction de f à cette adhérence.

Corollaire V.15.1.

Sous la condition :

$$\exists_{\theta\in\mathbb{R}^*_+} \quad \exists_{n_o\in\mathbb{N}^*} \quad \forall_{n\geq n_o} \quad |\lambda_{n+1}/\lambda_n| \geq 1+\theta ,$$

$\mathrm{Fr}(\Delta_o)$ est une coupure pour f .

La condition implique $L = 0$ et donc $\Delta_o = D_{*,o}$.

Soit s_o un point de $\mathrm{Fr}(\Delta_o)$ en lequel $\mathrm{Fr}(\Delta_o)$ admet une tangente. Si s_o était régulier pour f , la suite $(\wp_n)$ convergerait uniformément sur un voisinage du point s_o , d'après la proposition V.15. Or ceci est impossible puisque Δ_o $(= D_{*,o})$ est l'ouvert maximal de convergence de $\{f\}$. Le point s_o est donc singulier pour f . On sait, en outre, que l'ensemble des points

en lesquels $Fr(\Delta_o)$ admet une tangente est dense sur $Fr(\Delta_o)$, et il est trivial que l'ensemble des points singuliers de f est un fermé de $\mathbb{C}$; donc $Fr(\Delta_o)$ appartient à l'ensemble singulier de f .

Proposition V.16.

Sous les conditions :

1) $\lim(\text{Arg } \lambda_n) = 0$, $n \uparrow \infty$,

2) il existe un nombre strictement positif θ et une suite infinie d'entiers, strictement croissante, (n_j) , $j \in \mathbb{N}^*$, tels que :

$$\forall_{j\in\mathbb{N}^*} \quad |\lambda_{n_j+1}/\lambda_{n_j}| \geq 1+\theta ,$$

3) l'abscisse de convergence absolue de $\{f\}$, σ_A^f , est nulle,

4) l'abscisse d'holomorphie de f , σ_H^f , est strictement négative, désignant par σ^* l'abscisse de convergence de la suite $(\wp_{n_j})$, on a :

$$\sigma^* \leq [\theta/(1+\theta)]\sigma_H^f$$

On considère deux points s_1 et s_3 de $\mathbb{C}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1) $s_1 = \sigma_1 + i\tau_1$, $\sigma_1 < 0$, $\sigma_1/\sigma_H^f < \theta/(1+\theta)$

2) $s_3 = \sigma_3 + i\tau_1$, $\sigma_H^f < \sigma_3 < \sigma_1(1+\theta)/\theta$

et deux nombres strictement positifs a et k satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = ka^3$$
$$a < (\sigma_3 - \sigma_1)/\sigma_3 .$$

$h(a,\theta)$ désignant la même expression que dans la proposition V.15, on considère la suivante :

$$A = kh(a,\theta) - \sigma_1\{\log[(1+a^3)/(1-a)] + (1+\theta)\log[(1+a^2)/(1+a^3)]\} .$$

La partie principale de A (pour a infiniment petit) est :

$$-k\theta a^4 - \sigma_1 a = a[\theta(\sigma_3-\sigma_1)-\sigma_1] = a\theta\sigma_1[\sigma_3/\sigma_1 - (1+\theta)/\theta] ,$$

et donc $A < 0$ pour $a > 0$ suffisamment voisin de 0 .

On considère le point $s' = s_1 + ka$ et les disques d_1 , d_2 , d_3 centrés en s' et de rayons respectifs : $k(a-a^2)$, $k(a+a^4)$, $k(a+a^3)$. De $\sigma_1-\sigma_3 = ka^3$ et $(\sigma_3-\sigma_1)/\sigma_3 > a$, on déduit $ka^2 + \sigma_3 > 0$ et donc $ka^2 + \sigma_1 > 0$. Le disque d_1 est donc inclus dans Δ_o . Eu égard, à la proposition V.12 et désignant par $\mathcal{C}_1$ la frontière de d_1 , on a :

$$\underset{j_o\in\mathbb{N}^*}{\exists}\ \underset{j\geq j_o}{\forall}\ \underset{s\in\mathcal{C}_1}{\forall}\quad \log\Big|\sum_{p=n_j+1}^{\infty} a_p \exp(-s\lambda_p)\Big| < -|\lambda_{n_j+1}|[\sigma_1+k(a^2-a^3)]\ ,$$
$$< -|\lambda_{n_j}|(1+\theta)[\sigma_1+k(a^2-a^3)]\ ,$$

où ka^3 joue le rôle de ε dans la proposition V.12 et puisque $0 < ka^2 + \sigma_3 = k(a^2-a^3) + \sigma_1$.

Désignant par $\mathcal{C}_3$ la frontière de d_3 , et eu égard à la proposition V.10, on a :

$$\underset{j_1\in\mathbb{N}^*}{\exists}\ \underset{j\geq j_1}{\forall}\ \underset{s\in\mathcal{C}_3}{\forall}\quad |f(s)-\wp_{n_j}(s)| \leq |\wp_{n_j}(s)| + \sup\{|f(s)|\,|s\in\mathcal{C}_3\}$$
$$< \exp[\,|\lambda_{n_j}|(ka^3+ka^4-\sigma_1)\,]$$

(disons "très succinctement" que le terme ka^4 assure la majoration de l'expression $\varepsilon + T \sin\beta$ de V.10 et du supremum de $|f(s)|$ sur $\mathcal{C}_3$ par le moyen de l'exponentiation puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, que $\lim(\operatorname{Arg}\lambda_n) = 0$ et que f est holomorphe sur l'adhérence de d_3). On pose

$$M_j = \sup\{|f(s) - \wp_{n_j}(s)|\ |\ s\in\mathcal{C}_2\}\ .$$

Eu égard au théorème des trois cercles de Hadamard et aux majorations antérieures, on a :

$$\underset{j_2\in\mathbb{N}^*}{\exists}\ \underset{j\geq j_2}{\forall}\quad \log[(1+a^2)/(1-a)]\,.\log M_j$$
$$\leq |\lambda_{n_j}|\Big[\log\Big(\frac{1+a^3}{1-a}\Big).(ka^3+ka^4)+\log\Big(\frac{1+a^2}{1+a^3}\Big)(1+\theta)k(a^2-a^3)-\sigma_1|\lambda_{n_j}|\Big[\log\Big(\frac{1+a^3}{1-a}\Big)+(1+\theta)\log\Big(\frac{1+a^2}{1+a^3}\Big)$$

$$\leq |\lambda_{n_j}|\{kh(a,\theta)-\sigma_1[\ldots]\} = A|\lambda_{n_j}|\ .$$

Il en résulte que : $\lim M_j = 0$, $j \uparrow \infty$. La suite $(\wp_{n_j})$ converge donc uniformément sur l'adhérence de d_2 vers la restriction de f à cette adhérence. Le dernier résultat est indépendant du choix de la constante τ_1 . La suite

$(\wp_{n_j})$ est donc uniformément convergente sur tout compact $\mathcal{K}$ inclus dans le demi-plan $\{s\in\mathbb{C} \mid \sigma > \sigma_1 - ka^4\}$ vers la restriction de f à $\mathcal{K}$, et donc $\sigma^* \leq \sigma_1$. Or $\sigma_1/\sigma_H^f < \theta/(1+\theta)$ donc σ_1 vérifiant $\sigma_1 > [\theta/(1+\theta)]\sigma_H^f$ implique $\sigma^* \leq \sigma_H^f \theta/(1+\theta)$.

Remarque 1.

Si f est une fonction entière $(\sigma_H^f = -\infty)$ et si $\{f\}$ satisfait aux conditions (1), (2), (3) de la proposition précédente, alors la suite $(\wp_{n_j})$ converge sur $\mathbb{C}$.

Remarque 2.

S'il existe une suite infinie strictement croissante d'entiers (n_j) telle que la suite (θ_j) définie par la relation

$$|\lambda_{n_j+1}/\lambda_{n_j}| = 1+\theta_j ,$$

converge vers ∞, et si, en outre, les conditions (1), (3), (4) sont satisfaites on a alors $\sigma^* = \sigma_H^f$.

Proposition V.17.

Soit $\{f\}$ un élément dirichlétien vérifiant les conditions suivantes :

* Il existe une suite $\{\theta_i\}$ croissante non bornée, et une suite $\{n_i\}$ de N telles que l'on ait :

$$\forall i \in N \quad \left|\frac{\lambda_{n_i+1}}{\lambda_{n_i}}\right| \geq 1+\theta_i .$$

* L'ouvert maximal de convergence absolue Δ_o est non vide.

Alors la suite des sommes partielles de rang n_i, $\{\sum_{n_i}(s)\}$ convergent uniformément sur toute partie compacte de l'ouvert maximal d'holomorphie de f, contenant Δ_o.

Soient C_1, C_2, C_3 trois courbes fermées vérifiant les conditions suivantes : C_1 est contenue dans Δ_o, C_2 contient C_1 dans son intérieur, et C_3 contient C_2 dans son intérieur qui est borné ; de plus $\{f\}$ est holomorphe sur C_3 est dans le domaine limité par C_3.

Il existe deux constantes K_1 et K_2 positives telles que l'on ait :

$$\forall s \in C_3 : |f(s) - \sum_{n_i}(s)| \leq \exp[|\lambda_{n_i}|.K_1]$$

$$\forall s \in C_1 : |f(s) - \sum_{n_i}(s)| \leq \exp[-\lambda_{n_i+1}|K_2] \leq \exp[-(1+\theta_i)|\lambda_{n_i}|K_2] .$$

Désignant par M_2^i le maximum de $|f(s) - \sum_{n_i}(s)|$ sur C_2, il existe un nombre γ de l'intervalle $]0,1[$ telle que l'on ait :

$$\log M_2^i \leq \{\gamma[-(1+\theta_i)K_2] + (1-\gamma)K_1\}|\lambda n_i| .$$

Si i tend vers l'infini $\log M_2^i$ tend vers $(-\infty)$ et M_2^i tend vers zéro. La suite $\sum_{n_i}(s)$ converge donc uniformément sur C_2 et sur le domaine limité par C_2 vers f. On en déduit aisément le résultat annoncé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - BERNSTEIN V. - "Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet". Paris 1933.

[2] - BLAMBERT M. - "Sur l'abscisse de convergence simple des séries de Dirichlet générales". Annales de l'Inst. Fourier T. XIV (1964) - pp. 509-518.

[3] - BLAMBERT M. et SIMEON J. - "Extensions d'une propriété de S. Mandelbrojt et ensemble irrégulier d'une famille de Faltung au sens Hadamard". Anaïs da Faculdade de Ciencias do Porto L II (1969) pp. 1-33.

[4] - BLAMBERT M. et SIMEON J. - "Régularité et suprarégularité pour une famille de germes dirichlétiens". Annales de l'Inst. Fourier T. XIX (1969) pp. 249-274.

[5] - BOURION G. - "L'ultra convergence dans les séries de Taylor", Paris (1937).

[6] - EARL J.P. et SHACKELL J.R. - "Note on the région of overconvergence of dirichlet series with Ostrowski gaps". Proc. Glasgow. Math. Ass. 7 (1966) pp. 169-173.

[7] - GALLIE T.M. Jr - "Region of convergence of Dirichlet series with complex exponents". Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956) pp. 627-629.

[8] - GALLIE T.M. Jr - "Mandelbrojt's inequality and Dirichlet series with complex exponents". Proc. Amer. Math. Soc. 90 (1959) pp. 57-72.

[9] - HILLE E. - "Note on Dirichlet's series with complex exponents". Ann. of Math. 25 (1924) pp. 261-278.

[10] - JOHNSON G. Jr - "Collective singularities of a family of analytic functions". Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956) pp.653-655

[11] - LEONTEV A.F. - "Series of Dirichlet polynomials and their generalisations". Trudy Mat. Inst. Steklov 39 (1951) pp. 1-215.

[12] - LEONTEV A.F. - "On overconvergence of a series". Dok. Akad. Nauk SSSR - 94 (1954) pp. 381-384.

.../...

[13] - LUNC G.L. - "Sur quelques généralisations des séries de Dirichlet" Mat. Sb (N.S) 10(52) (1942) pp. 33-50.

[14] - LUNC G.L. - "On a class of generalized dirichlet's series". Uspeki Mat. Nauk. 75-3 (12) (1957) pp.173-179.

[15] - LUNC G.L. - "On the Landau-Pringsheim theorem". Izv. Akad. Nauk. Azer. SSR. Ser. Fiz. Mat. Tech. Nauk. 1 (1963) pp. 73-79.

[16] - LUNC G.L. - "Dirichlet series with a sequence of complex exponents having angular density". Soviet. Math. Dokl. 4 (1963) pp. 994-996.

[17] - LUNC G.L. - "On Dirichlet series with complex exponents". Mat. Sb(N.S) 67 (109) (1965). pp. 89-134.

[18] - LUNC G.L. - "Dirichlet series with a non-measurable sequence of complex exponents". Mat. Sb (N.S) 68(110) (1965) pp. 58-62.

[19] - LUNC G.L. - "Dirichlet series with an irregular distribution of the arguments of exponents". Litovsk. Mat. Sb 6(1966) pp. 515-532.

[20] - LUNC G.L. - "Estimates of the growth of a canonical product". Izv. Akad. Nauk. Armjan. SSR. Ser. Mat. 3 n°2 (1968) pp. 126-136.

[21] - MACINTYRE A.J. - "An overconvergence theorem of G. Bourion". Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. 250/23 (1958) pp.3-11.

[22] - MANDERLBROJT S. - "Dirichlet series". Rice. Inst. Pamphlet 31(1944).

[23] - MIKUSINSKI J. - "On Dirichlet series with complex exponents". Ann. Polon. Math. 2(1955) pp. 254-256.

[24] - MISKELEVICIUS A. - "On the convergence of Dirichlet series". Litovsk. Math. Sb 3 (1963) pp. 105-113.

[25] - MISKELEVICIUS A. - "On the domain of convergence of the Dirichlet series". Litovsk. Math. Sb 5 (1965) pp. 117-126.

[26] - MISKELEVICIUS A. - "On the boundary of the region of convergence of a Dirichlet series". Litovsk. Math. Sb 6(1966) pp. 91-97.

[27] - MISKELEVICIUS A. - "The overconvergence of a Dirichlet series". Litovsk. Math. Sb 7 (1967) pp. 651-664.

.../...

[28] - MONTEL P. - "Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications". Paris 1927.

[29] - SCHMIDT A. - "Konvergente und asymptotische Darstellungen für die Losungen linearen Differentialgleichungen deren Koeffizienten Dirichletsche Reihen oder Exponentialpolynome mit komplexen Exponenten". Math. Z 46 (1940) pp. 481-558.

[30] - SHACKELL J.R. - "Some theorems on the boundary behaviour of Dirichlet series with complex exponents". J. London Math. Soc. 42 (1967) pp. 57-72.

[31] - SHACKELL J.R. - "Singularities of Dirichlet series with complex exponents". Michigan. Math. J. 14 (1967) pp.497-505

[32] - SHACKELL J.R. - "On a conjecture of V. Bernstein". Ark. Mat. 8 (1969) pp. 83-101.

[33] - SHACKELL J.R. - "Overconvergence of Dirichlet series with complex exponents". J. Analyse Math. (1969) pp.135-170.

[34] - SIMEON J. - "Sur la notion de sur-disque de régularité et son application à l'étude des familles normales de germes dirichlétiens". Annales du C.S.U. Chambéry 6 (1968) pp. 41-52.

[35] - SIMEON J. - "Généralisation d'un théorème de composition de S. Mandelbrojt et applications". C.R.A.S. (1968) t. 266, pp. 1233-1236.

[36] - SIMEON J. - "Régularité et suprarégularité d'une famille de germes dirichlétiens". C.R.A.S. (1969) t.268 pp.32-35.

[37] - VALIRON G. - "Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et à coefficients constants". Ann. Ecole Norm. (3) Vol. 46 (1929) pp. 25-53.

[38] - WILSON A. - "The "overconvergence" of bounded normal families of analytic functions". Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961) pp. 498-501.

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES.

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA J.C.	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	RADHAKRISHNA Pidatala	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	AUBERT Guy	Physique
	BEAUDOING André	Pédiatrie
MM.	BERTRANDIAS Jean Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POUJOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
M.	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BLIMAN Samuel	Electronique (E.I.E.)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (C.U.S.)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des fluides
	BRIERE Georges	Physique expérimentale
	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et or gén³nése
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (E.F.P.)
	CHIBON Pierre	Biologie animale

	COHEN-ADDAD J.P.	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (C.U.S.)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GENSAC Pierre	Botanique
	GERMAIN Jean Pierre	Mécanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean René	Mathématiques pures
	JOUBERT Jean Claude	Physique du solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean Pierre	Physique nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (C.U.S.)
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (I.N.P.)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean Claude	Physique du solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	PIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B)
	ROUGEMONT (DE) J.	Neuro-Chirurgie
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (I.N.P.)
MM.	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

VU,

Grenoble, le

Le président de la thèse,

C. CHABAUTY

VU, et permis d'imprimer

Grenoble, le

Le président de l'Université
scientifique et médicale,